

ANNALEN DER PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN UND FORTGEFÜHRT VON

P. A. G. CRELL, L. W. GILBERT, J. C. FOCKENBERG, G. v. S. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 42. Heft 4.

DER GANZEN REIHE 307. BANDEN 4. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUENCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, K. WARRBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT NEUN TAFELN.



LEIPZIG, 1913.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH
DÖRRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
16 Heften (= 2 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 42 A.
(Ausgegeben am 4. November 1913.)*

Inhalt.

	Seite
1. Manne Siegbahn. Untersuchung über die Schwingungen von Telephonmembranen. I. (Hiernu Taf. V—XI)	680
2. E. Waetsmann. Die Entstehungsweise von Kombinationstönen im Mikrophon-Telephonkreis	739
3. Rudolf Ortway. Über die Abzählung der Eigenschwingungen fester Körper	745
4. Wilhelm Escher. Experimentelle Bestimmung der spezifischen Wärme zweiatomiger Gase nebst anschließenden theoretischen Schlussfolgerungen. (Hiernu Taf. XII.)	761
5. Oskar Richter. Anomalien der spezifischen Wärme gewisser Legierungen	779
6. Artur Rosenthal. Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme	796
7. Bergen Davis. Eine Theorie der Stoßionisation und die Form der Funktion $\alpha/p = f(X/p)$	807
8. W. Voigt. Einige Bemerkungen über das Verhalten von Spektrallinien mit Trabanten im Magnetfeld	815
9. Karl Wolff. Untersuchungen im äußersten Ultraviolett. (Hiernu Taf. XIII.)	825
10. F. Paschen. Bemerkungen zur Arbeit des Hrn. K. Wolff	849
11. H. Lichte. Über die Schallintensität des tönenden Lichtbogens.	849
12. H. v. Siemens. Über Dampfdruckmessungen und Thermometrie bei tiefen Temperaturen	871

Die Redaktion der Annalen wird von den unseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleisherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 42.

1. Untersuchung über die Schwingungen von Telephonmembranen. I; von Manne Siegbahn.

(Hierzu Tafel V—XI.)

Einleitung.

Zur Beurteilung der Wirkungsweise verschiedener Telephonkonstruktionen ist es von größter Bedeutung, die Bewegungsvorgänge der Telephonmembrane objektiv fixieren zu können. Es liegen auch zu diesem Zwecke mehrere Untersuchungsmethoden vor, die ein mehr oder weniger eindringendes Studium der Membranschwingungen gestatten. Um die Schwierigkeiten, die einer genauen Verfolgung der Bewegungen entgegenstehen, beurteilen zu können, mögen einige numerische Angaben über die Größenordnung der Schwingungsamplituden vorausgeschickt werden.

Durch eine Untersuchung im Telegraphen-Ingenieurbureau des Deutschen Reichspostamtes wurde die Größe der Amplituden (durch eine optische Interferenzmethode gemessen) bei einem starken Tone auf etwa 0,000052 mm festgestellt. Die Stromstärke betrug in diesem Falle 0,00034 Amp. Bei normalem Sprechen würden die Amplituden noch kleiner sein. Andere Messungen von C. Barus¹⁾ bestätigen dies, indem er Amplituden von 0,00001 mm gefunden hat. Andererseits gibt Fröhlich die Amplituden eines lautsprechenden Siemens-telephons auf 0,085 mm an. Bedenkt man dann noch, daß die Schwingungsdauer der einzelnen Schwingungen von der Größenordnung 0,01 bis 0,001 Sekunde ist, so versteht sich von selbst, daß eine naturgetreue Reproduktion der Bewegungsvorgänge mit großen Schwierigkeiten verbunden sein muß. Die oben erwähnte optische Interferenzmethode, die zur Messung der Maximalamplitude sehr geeignet ist, läßt

1) C. Barus, Silliman Journal 1897. p. 219.

sich zur Registrierung der Schwingungskurve schon ihrer zu geringen Lichtstärke wegen nicht verwenden, von anderen Ursachen zu schweigen.

Es sind wesentlich zwei Methoden zur Registrierung der Membranschwingungen verwendet worden. Die eine ist die für akustische Untersuchungen so viel gebrauchte Methode der Königschen Manometerflamme. Für telephonische Zwecke ist sie von Fröhlich benutzt worden. Die Manometermethode ist zwar für qualitative Untersuchungen wegen ihrer bequemen Montierung sehr geeignet. Zu quantitativen Messungen kann sie jedoch gar nicht verwendet werden; ebenso sind die nach dieser Methode aufgenommenen Kurvenbilder mit größter Vorsicht zu behandeln, wie mehrere Forscher gezeigt haben.

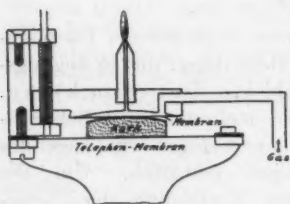


Fig. 1.

Bei seinen Untersuchungen nach der Flammenmethode benutzte Fröhlich eine Einrichtung, die aus Fig. 1 zu sehen ist.

Auf der Membrane wurde eine Korkplatte befestigt, die ihrerseits auf die elastische Manometermembrane wirkt. Beim Hineinsprechen in das Telephon „tanzt“ die Flamme, was subjektiv mit Hilfe eines rotierenden Spiegels gesehen oder auch auf eine vorüberbewegte lichtempfindliche Platte photographisch fixiert werden kann. Es ist zu erwähnen, daß diese photographische Aufzeichnung in zwei verschiedenen Weisen gemacht werden kann. Im allgemeinen wirft man ein Bild der Flamme auf die bewegte Platte und erhält dann Photographien, wo die Flammenspitze die Bewegungskurve zeichnet. Man kann aber auch die Struktur der Flamme beim Photographieren wegfällen lassen und nur die Lichtstärke in verschiedenen Augenblicken registrieren. Das letztere Registrierverfahren ist von Ruhmer zur Aufnahme von „sprechenden Films“ ausgebildet worden. Diese Projektionsmethode ähnelt der hier zu besprechenden neuen Methode.

Bei der anderen Gruppe von Registriermethoden werden die Bewegungen der Membrane nach der Spiegelmethode vergrößert. Der Spiegel kann entweder an der Stelle der

größten Winkeländerung der Membrane starr befestigt werden oder er wird mit einer Hebeleinrichtung an der Mitte der Membrane montiert. Von diesen zwei Methoden ist die erstere aus prinzipiellen Gründen der anderen vorzuziehen. (Vgl. hierzu die Untersuchung von R. Kempff-Hartmann¹⁾, wo diese Methoden kritisch besprochen werden.) Durch einen Kunstgriff, der darin besteht, daß der Lichtstrahl zweimal vom beweglichen Spiegel reflektiert wird, ist es Kempff-Hartmann gelungen, eine ziemlich eingehende Analyse der Membranschwingungen zu erzielen. Die hierbei benutzte Einrichtung zeigt Fig. 2, die wohl ohne Beschreibung zu verstehen ist.

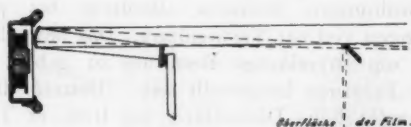


Fig. 2.

Wir werden weiter unten auf seine Arbeit zurückkommen. — Es ist aber ein nicht zu vergessender, großer Nachteil dieser Methode, daß ihre Vergrößerung so gering ist, daß die Schwingungsamplituden der Telephonmembran von einer ganz anderen Größenanordnung sein muß als die beim normalen Betriebe vorkommenden. Die Größe der „Durchbiegung“ (d) der Membrane, d. h. die Abweichung der Membranmitte von der Gleichgewichtslage läßt sich folgendermaßen schätzen (wenn wir nur mit einer einzigen Spiegelung rechnen): R sei der Radius der Telephonmembrane, A die Amplitude der vom Lichtstrahl gezeichneten Kurve und 2 die doppelte Brennweite der Konkavspiegel, dann ist

$$\frac{d}{R} = \frac{A}{2}.$$

Kempff-Hartmann gibt jetzt für einen Spiegel mit einer Fokaldistanz von 30 cm aus einigen seiner Kurven folgende Werte für d an:

$$d = 0,18; 0,06, 0,015 \text{ mm.}$$

Wie zu ersehen ist, sind wir von den normalen Bedin-

1) R. Kempff-Hartmann, Ann. d. Phys. 4. (8) 1902. p. 481.

gungen noch weit entfernt. Durch den oben genannten Kunstgriff kann die Vergrößerung vielleicht wohl ein wenig erhöht werden. Die in der genannten Untersuchung mitgeteilten Kurven von Vokalen usw. entsprechen nach Angabe einer Durchbiegung von 0,02 mm.

Bei den anderen Spiegelmethoden werden die Schwingungen der Membranmitte durch eine Hebelübertragung dem Spiegel mitgeteilt. Hier ist eine Möglichkeit geboten, durch die Hebeleinrichtung eine erste Vergrößerung zu erzielen. Bei den hier in Frage kommenden außerordentlich kleinen Bewegungen ist aber dann die Folgsamkeit des registrierenden Hebels aus praktischen Gründen sehr schwer zu erzielen. Solche Anordnungen kommen allerdings bei phonetischen Untersuchungen viel zur Verwendung. Das bewegliche System muß aber, um zuverlässige Resultate zu geben, mit außerordentlicher Präzision hergestellt sein. (Betreffs dieser Fragen siehe die ausführliche Darstellung bei Robert Tigerstedt: Handbuch der physiologischen Methodik, Band „Phonetik“ von Poirot.) Um Mißverständnissen vorzubeugen, möge schon hier bemerkt werden, daß der Zweck dieser Arbeit eine Klarlegung der Funktionsweise des Telephons ist, und daß somit phonetische Fragen nur insofern berührt werden, als sie zur Erreichung dieses Zieles nötig sind. Die nachfolgenden Kurven der verschiedenen Vokale usw. sind daher nicht als phonetisch charakterisierend für die betreffenden Vokale zu betrachten, sondern sollen die Bewegung der Telephonmembrane bei Wiedergabe des Vokales illustrieren. Nach dieser kleinen Übersicht gehe ich zur Beschreibung der neuen Registriermethode über.

§ 1. Die Registriermethode.

Es war zuerst meine Absicht, eine Methode nach Art der Flammenmethode zu benutzen, wobei aber die Flamme durch einen keilförmigen Spalt ersetzt war. Die eine der zwei Spaltplatten sollte fest sein, die andere dagegen die Membranschwingungen mitmachen. Wurde dann der Spalt hell beleuchtet und in gewöhnlicher Weise auf einen bewegten Film photographiert, so ergab die Keilspitze eine Schwingungskurve. Durch Veränderung der Keilwinkel war die Empfindlichkeit zu variieren. Bei der Ausführung dieser

Experimente zeigte sich aber, daß die erwarteten Kurvenbilder zur Analyse nicht dienen konnten. Die Abschattierung des Bildes der Keilspitze war gar nicht so markiert, wie man aus der Analogie mit der Flammenmethode hätte erwarten können. Dagegen waren die Maxima und Minima der Lichtstärke durch entsprechende helle und dunkle Linien deutlich zu erkennen. Aus diesen Gründen wurde die oben skizzierte Methode in der Art modifiziert, daß der keilförmige Spalt durch eine mit parallelen Kanten ersetzt wurde.

Die Fig. 3 zeigt das Prinzip der Methode. Die Platten *A* und *B* bilden zusammen einen Spalt, dessen Breite dadurch verändert wird, daß *B* bei den Membranschwingungen der

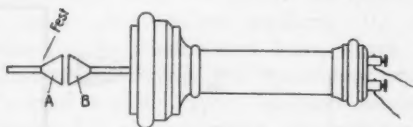


Fig. 3.

feststehenden Platte *A* mehr oder weniger genähert wird. Der Spalt wird mit einer Bogenlampe stark beleuchtet und die durchgehende Lichtmenge in jedem Momente auf einem vorbeigeführten Film registriert.

In dieser einfachen Form ist aber die Methode ziemlich unempfindlich, d. h. die Amplituden der Schwingungen müssen verhältnismäßig groß sein, um registriert zu werden. Ferner würde ein Zusammenklappen der zwei Platten die ganze Justierung vernichten. Es wurde daher anstatt des festen Schirms *A* das *reelle* Bild einer Platte in der Ebene von *B* projiziert, das denselben Dienst wie *A* leistete. Diese Einrichtung hat sich bei der praktischen Ausführung sehr gut bewährt. Durch sie war es auch möglich, die Spaltbreite, d. h. den Abstand zwischen *B* und dem „optischen Schirm“ *A* sehr klein zu machen. Um die für die Registrierung nötige Lichtmenge durch den sehr schmalen Spalt hindurchtreiben zu können, wurde eine Aufstellung, wie sie Fig. 4 schematisch zeigt, angewandt.

Von der Bogenlampe *A* wird der Spalt *C* hell beleuchtet. Das umgekehrte Mikroskop *D* wirft dann ein reelles, stark verkleinertes Bild dieses Spaltes in der Ebene des beweg-

lichen Schirmes, und zwar wird dieses so eingestellt, daß das Bild *einer der Kanten* von *C* zusammen mit dem beweglichen Schirm die oben erwähnte schmale Spalte bildet. (Die andere Spalthälfte in *C* dient lediglich dazu, fremdes Licht abzuhalten.) Durch ein zweites, schwach vergrößerndes Mikroskop wird das Spaltbild auf den Film projiziert. Um aber dem Spaltbild auf dem photographischen Film die nötige Länge zu geben (etwa 1 cm), ohne die Breite zu vergrößern, wurde die letztere Projizierung unter Zwischenschaltung einer Zylinderlinse *G* bewerkstelligt.

Betreffs der verschiedenen Details der Einrichtung mag folgendes bemerkt werden:

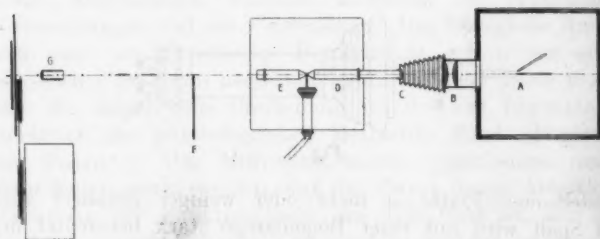


Fig. 4.

Es ist von hohem Werte, für den beweglichen Spaltschirm ein passendes Material zu finden. Erstens muß dieser nämlich sehr leicht sein, um die Bewegungen der Membrane nicht zu stören, zweitens ist eine hinreichende Steife nötig, damit er den Schwingungen wirklich folgt, ohne Eigenschwingungen auszuführen; drittens kommt dazu die Forderung einer scharfen, geraden Kante, die auch bei der (etwa hundertfachen) Vergrößerung keine Risse zeigt. Ein für den letzten Zweck passendes Material bietet eine Klinge, wie sie zu einem Rasierhobel (z. B. Gillette) verwendet wird. Ein aus dieser ausgeschnittenes Stückchen von der Größe 2×4 mm wurde auf ein Stäbchen aus Aluminium oder Reishalm geklebt. Bei den an neueren Telephonen gebräuchlichen, verhältnismäßig steifen und dicken Membranen werden sicherlich die Bewegungen dadurch in keiner Weise beeinträchtigt. Es ist aber schon jetzt zu bemerken, daß die Klinge nicht nur die erwünschte Hin- und Herbewegung in ihrer eigenen Ebene

macht, sondern wegen der unregelmäßigen Schwingungen der Membrane auch nach anderen Richtungen bewegt wird. Wir werden den Einfluß dieser Erscheinung später erörtern.

Zur Erhaltung guter Photogramme ist eine genaue Justierung der Optik nötig; zu diesem Zwecke waren die Mikroskope und die Fassung des Telephons in ihren Längsrichtungen mikrometrisch verschiebbar. Die Einstellung geschah jetzt folgendermaßen: Zuerst wurde auf dem Schirm *F* (Fig. 4) ein scharfes Bild der Klinge durch Verschieben des Mikroskops *E* geschaffen. Sodann wurde die Spalte *C* durch Änderung von *D* in der Ebene der Klinge projiziert, wobei gleichzeitig das Bild bei *F* scharf sein muß. Je nach der nötigen Empfindlichkeit wird dann die Klinge der gegenüberliegenden Spalthälfte mehr oder weniger genähert. Die im einzelnen Falle erwünschte Empfindlichkeit kann durch Betrachtung der Intensitätsveränderungen des Spaltbildes auf einem hin- und herbewegten weißen Papier ermittelt werden. Für die photographische Aufnahme ist aber der späteren Ausmessung wegen ein längeres Spaltbild wünschenswert. Das Bild in *F* wird daher mittels einer Zylinderlinse *G* in der Ebene des Films scharf eingestellt, wobei selbstverständlich die Schärfe in Längsrichtung des Spaltbildes verloren geht. Durch eine Blende nahe der photographischen Platte wird nur der lichtstärkste Teil des Bildes hindurchgelassen. Schließlich wird der Schirm *F* bis nahe an das an dieser Stelle scharfe Spaltbild vorgeschoben, um fremdes Licht abzuschneiden.

Als Lichtquelle hat eine kleine Handregulierbogenlampe mit Homogenkohle gedient. Bei normalem Brennen verbraucht dieselbe eine Stromstärke von etwa 5—7 Amp. Um die unwillkommenen elektrischen Schwingungen in der Bogenlampe herabzudrücken, wurde eine Drosselspule vorgeschaltet. In einigen Photogrammen sind trotzdem Lichtänderungen in der Bogenlampe aufgetreten; sie sind aber leicht von den Membranschwingungen zu unterscheiden. In einigen zweifelhaften Fällen ist die Lichtintensität der Bogenlampe gleichzeitig mit den Membranschwingungen aufgenommen.

Andererseits ist eine vibrationsfreie Aufstellung des Registrierapparates von größter Bedeutung. Obgleich die beiden Mikroskope nebst Telephon auf einer dicken Holzplatte aufgestellt waren, zeigte sich, daß die Schwingungen einer Stimm-

gabel, auf demselben Tische stehend, deutlich registriert wurde. Das Photogramm (Taf. V) zeigt eine derartige Aufnahme. Der eine Schenkel der Stimmgabel war dabei mit einem Aluminiumzeiger versehen, der über die Spalte hinausragte; der Abstand zwischen Stimmgabel und Telephon war etwa 1 m. Wie zu ersehen ist, stimmen die Perioden der Lichtschwankungen vollkommen mit denen der Stimmgabel überein.

§ 2. Die photographische Registrierung.

Die photographische Registrierung geschah im allgemeinen in der Weise, daß eine Platte (Größe $4,5 \times 24$; $2,25 \times 24$; $4,5 \times 12$, je nach Bedarf), in eine Kassette eingesetzt, mit der Hand vorbeigezogen wurde. Die Geschwindigkeit konnte nach einiger Übung hinreichend konstant gehalten werden. Übrigens wurde dies, wenn nötig, durch Zeitmarkierung kontrolliert. Um einen quantitativen Begriff der verwendeten Geschwindigkeiten zu geben, mag erwähnt werden, daß 100 cm pro Sekunde etwa die normale war. Außer diesen Aufnahmen wurde noch für spezielle Zwecke, wenn z. B. ein längeres Verfolgen der Membranschwingungen nötig war, als die Platte gestatten konnte, eine rotierende Trommel mit Films angewandt. Bei jedem Umlauf wurde die Trommel etwa 3 mm vorwärts bewegt, so daß beim Abblenden des Spaltbildes zu dieser Größe eine fortlaufende Registrierung möglich war. In dieser Weise sind z. B. die Eigenschwingungen der Telephonmembrane untersucht, wie später beschrieben werden soll.

§ 3. Die Zeitmarkierung.

Das angewandte Verfahren, die Platte einfach vorbeizuziehen, machte eine genaue Kontrolle der Geschwindigkeit nötig. Vor allem muß festgestellt werden, ob die Platte mit genügend konstanter Geschwindigkeit gezogen wird. Die gewöhnliche Methode, den Lichtstrahl zu bestimmten Zeiten abzuschneiden, zeigte sich für diesen Zweck weniger geeignet. Wollte man nämlich den Lichtstrahl hinreichend oft unterbrechen, um die Geschwindigkeit der Platte von Punkt zu Punkt zu kontrollieren, so würde die Aufnahme unbrauchbar werden, da die „Zeitlinien“ von denen der Schwingungen nicht zu unterscheiden wären. Ferner würden die Linien nicht immer scharf gezeichnet, weil oft zwei Linien der oben-

genannten verschiedenen Arten einander störten. — Besser eignet sich dann die Stimmgabelmethode, und diese wurde auch bei der Untersuchung ihrer Einfachheit wegen im allgemeinen verwendet. Die Stimmgabel wurde dabei so nahe wie möglich an die Platte geführt und, um den früher geschilderten Störungen des Telephons zu entgehen, auf einem besonderen Stativ aufgestellt. Taf. V, Fig. 2 zeigt eine Aufnahme der beschriebenen Zeitmarkierung, und zwar stellen die Photogramme den Schwingungsvorgang der Membranne mitte dar bei dem Vokale.

In der durch die Stimmgabelschwingungen gezeichneten Sinuskurve erhalten wir eine stetige Kontrolle der Geschwindigkeit, wenigstens insofern, als eine Diskontinuität in der Bewegung der Platte sofort zu erkennen ist. Eine kleinere kontinuierliche Abweichung von der Sinusform läßt sich aber direkt mit dem Auge nicht erkennen. In dieser Hinsicht ist ein anderes Zeitmarkierungsverfahren einwandfreier. Läßt man nämlich, wie in Fig. 4 schematisch dargestellt ist, dicht vor der Blende ein Rad mit herausstehenden feinen Nadeln rotieren, wobei diese die Spaltblende in der Längsrichtung überfahren, so erhält man an dem Photogramme eine Serie geneigter Linien, wie Taf. V, Fig. 3 zeigt. Nur wenn die Geschwindigkeit der Platte konstant gewesen ist, sind diese Linien gerade, vorausgesetzt, daß die Rotationsgeschwindigkeit des Rades konstant ist. Das Nadelrad wurde zu diesem Zwecke von einem Uhrwerk getrieben und zeichnete dann 166 Striche pro Sekunde.

§ 4. Auswertung der Photogramme.

A. Mit Thermosäule.

Die nach der geschilderten Methode aufgenommenen Photogramme sind zwar für jede Bewegung der Membrane sehr charakteristisch — man vergleiche hierzu die Photogramme (Taf. V, VI, VII, VIII), wo die Aufnahme der Vokale gezeigt wird. Die Photogramme 1 bis 17 sind mit Telephonen und Mikrophonen der Firma L. M. Eriksson (Stockholm) aufgenommen, die späteren 18 bis 23 mit Telephonen von Apel (Göttingen). Die Pfeile links zeigen, in welcher Richtung die Photogramme abzulesen sind. In gewissen Fällen würde man sich wohl mit einer derartigen Aufnahme begnügen können, z. B. wenn eine

Feststellung der Zahl und Lage der Maxima und Minima hinreichend ist. Für ein genaues Verfolgen des Bewegungszustandes der Membrane ist aber eine photometrische Ausmessung der Platten nötig. Hierbei stehen uns mehrere Methoden zur Verfügung, von denen bisher nur zwei verwandt worden sind, und zwar waren hierbei die zur Verfügung stehenden Instrumente bestimmend.

Die erste der genannten Methoden gründete sich auf die Verwendung einer Thermosäule zur Messung des an jedem Punkte (Linie) durchgelassenen Lichtes. Fig. 5 zeigt eine schematische Darstellung der Einrichtung, die hierzu verwandt wurde. Das Bild des vertikalen Nernstfadens D wird mit Hilfe einer Zylinderlinse A auf die Platte projiziert. Durch eine

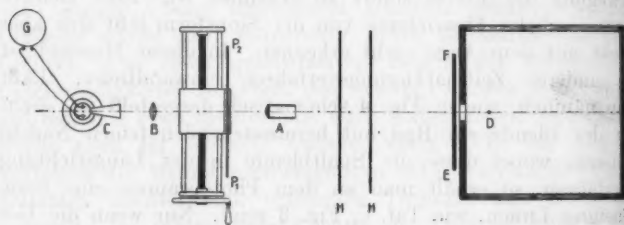


Fig. 5.

besondere Blende, die dicht vor die Platte P_2 gestellt wurde, konnte ein passendes Stück des langen, in horizontaler Richtung stark verkleinerten Bildes hindurchgelassen werden. Durch eine zweite (gewöhnliche) Linse B wurde das Licht auf eine Rubensche Thermosäule konzentriert. Die entstehende thermoelektrische Kraft wurde durch die Ausschläge eines Drehspulengalvanometers mit kleinem Widerstand bestimmt. Zur Abblendung fremden Lichtes dienten noch zwei Schirme H, H . Um die Platte nach jeder Messung ein bestimmtes Stück, im allgemeinen 0,25 mm, vorwärtsschieben zu können, wurde sie auf einer Teilungsmaschine befestigt, wobei durch Einstellung der Maschine auf die gewünschte Strecke die Arbeit sehr erleichtert wurde.

Wollte man den Verlauf der Kurve noch näher verfolgen, so würde man eine Ausmessung in kürzeren Intervallen ausführen. Es ist aber sehr fraglich, ob die Kurven dadurch rich-

tiger würden, ganz abgesehen von der dadurch bedingten Arbeitsvermehrung, die schon bei dem gewählten Intervall von 0,25 mm sehr zeitraubend war. Die Breite der „Lichtlinie“ auf der Platte dürfte etwa 0,25 mm betragen, wobei die Breite sich auf die Strahlen bezieht, die an der Säule wirksam sind. Eine jedesmalige Verschiebung der Lichtlinie um das Doppelte dieses Wertes schien mir deshalb genügend zu sein.

Diese nötige Breite der durchgelassenen Lichtlinie kann aber in gewissen Fällen zu einer Verzerrung der Schwingungskurve Anlaß geben. Denken wir z. B. an die Ausmessung eines Photogramms, das einen diskontinuierlichen Übergang aufweist (der durch eine hinreichend rapide Änderung der Membranstellung eintreten kann), so würde die photometrische Ausmessung einen *kontinuierlichen* Übergang von der einen Stellung zu der anderen zeigen, dessen Breite gleich der wirklichen Strahlenbreite wäre.

Um die Breite der an der Thermosäule wirksamen Lichtlinie festzustellen, wurde folgendermaßen verfahren. An Stelle der photographischen Platte wurde ein undurchlässiger Schirm mit scharfer Kante auf der Teilungsmaschine befestigt und die Lichtlinie so abgeblendet, daß nur der mittlere Teil zur Wirkung kam. Der Schirm wurde dicht an die Lichtlinie vorgeschoben und die Gesamtintensität durch Ablesung des Galvanometerausschlages ermittelt. Dann wurden durch jedesmaliges Verschieben des Schirmes um 0,02 mm entsprechende Teile der Lichtlinie abgeblendet und die Intensität bestimmt. Man erhält auf diese Weise eine Integralkurve der nicht abgeblendeten Lichtmenge, woraus durch Differenzierung die Verteilung der „wirksamen“ Strahlen innerhalb der Lichtlinie berechnet werden kann.

Die Tabelle I gibt die Messungen wieder: Nach jeder Messung ist der Nullpunkt bestimmt worden, und zwar sind alle Messungen mit bestimmten Zeitintervallen ausgeführt worden.

In Fig. 6 ist außer der so ausgemessenen Kurve ihre „Derivierte“ eingezeichnet. Diese stellt somit die Intensitätsverteilung innerhalb der Lichtlinie dar (in der Mitte dieser Linie). Bei dieser Messung ebenso wie in allen nachfolgenden Photogrammmessungen wurde die Zylinderlinse so gestellt, daß das Bild des Nernstfadens auf der Platte scharf hervortrat.

Tabelle I.

Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag
0,00	16,11	1,38 (1,33) 1,28	14,78	0,32	6,06	1,21 (1,21) 1,21	4,85
0,02	15,67	(1,25) 1,21	(14,42)	0,34	5,22	(1,21) 1,21	4,01
0,04	16,03	(1,21) 1,20	14,82	0,36	4,50	(1,21) 1,22	3,29
0,06	15,81	(1,21) 1,22	14,60	0,38	3,87	(1,22) 1,21	2,65
0,08	15,34	(1,21) 1,19	14,13	0,40	3,26	(1,21) 1,21	2,05
0,10	14,88	(1,20) 1,22	13,68	0,42	2,77	(1,21) 1,20	1,56
0,12	14,44	(1,22) 1,21	13,22	0,44	2,38	(1,20) 1,20	1,18
0,14	13,79	(1,21) 1,22	12,58	0,46	2,12	(1,20) 1,20	0,92
0,16	13,10	(1,22) 1,23	11,88	0,48	1,92	(1,20) 1,19	0,72
0,18	12,50	(1,23) 1,24	11,27	0,50	1,79	(1,19) 1,18	0,60
0,20	11,62	(1,25) 1,26	10,37	0,52	1,72	(1,19) 1,20	0,53
0,22	10,80	(1,24) 1,22	9,56	0,54	1,64	(1,19) 1,18	0,45
0,24	9,87	(1,23) 1,24	8,64	0,56	1,61	(1,19) 1,20	0,42
0,26	8,98	(1,24) 1,24	7,74	0,58	1,58	(1,18) 1,16	0,40
0,28	8,09	(1,23) 1,22	6,86	0,60	1,50	(1,15) 1,14	0,35
0,30	6,98	(1,22) 1,21	5,76				

Aus der Kurve ist zu ersehen, daß die Breite der Lichtlinie in halber Höhe etwa 0,30 mm beträgt. Dieser Wert ist aber als ein Maximalwert zu betrachten, weil bei den Plattenmessungen eine starke Schwächung teils durch die Glasplatte, teils durch die photographische Schicht (wenn auch nicht beleuchtet) verursacht wird, so daß nur der mittlere Teil zur Wirkung kommt. In Wirklichkeit dürfte der oben angegebene Wert von 0,25 mm das richtige Maß der Breite sein.

Um nach dieser Methode brauchbare Messungen ausführen zu können, war eine hinreichend konstante Lichtquelle nötig. Dazu wurde durchweg ein Nernstfaden (à 0,5 Amp.) verwandt.

Auch bei Benutzung des städtischen Netzes zur Treibung der Lampe war die Konstanz genügend, wie aus den folgenden Messungen zu ersehen ist. Teils um das sichere Funktionieren der Versuchseinrichtung zu erproben, teils zur Feststellung der passenden Zeitintervalle zwischen den Galvanometerablesungen sind die folgenden zwei Messungsreihen aufgenommen. Dabei war eine Platte eingesetzt, die aber während der Messung nicht

Verteilung der Lichtintensität.

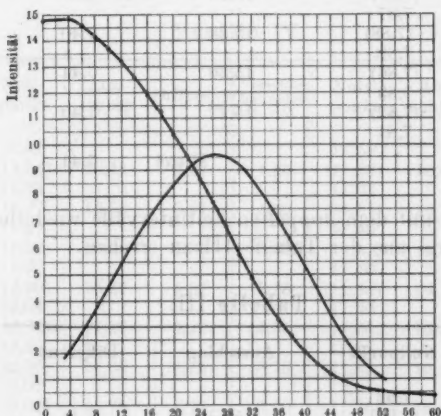


Fig. 6.

bewegt wurde. Bei der Messung wurde so verfahren, daß beim Ablesen der Nullpunkte der Schirm vor der Lichtquelle weggezogen und der Ausschlag des Galvanometers nach einer halben Minute abgelesen wurde; in diesem Momente wurde die Lichtquelle wieder abgeblendet und der Nullpunkt nach einer halben Minute bestimmt. Das Mittel der zwei Nullpunktablesungen ist in Klammern angeführt und als Ausgangspunkt bei Berechnung des Ausschlages benutzt.

Wie die Tabelle II zeigt, sind die Ablesungen bei einer bestimmten Lage der Platte eindeutig (die Abweichungen vom Mittel betragen höchstens 0,4 Proz.). Es war noch eine Untersuchung nötig, um festzustellen, ob die Thermosäule nach dieser Zeit in Wärmegleichgewicht war. Dazu wurde dieselbe Messungs-

Tabelle II.

Nullpunkt	Ausschlag	Differenz
7,80		
(7,80)	15,19	7,39
7,81		
(7,83)	15,24	7,41
7,85		
(7,86)	15,30	7,44
7,88		
(7,88)	15,28	7,40
7,87		
(7,88)	15,28	7,40
7,89		
(7,86)	15,30	7,44
7,83		
(7,82)	15,22	7,40
7,81		
Mittel		7,41

reihe jedoch mit dem doppelten Zeitintervalle wiederholt. Die Resultate sind aus der Tabelle III zu ersehen.

Tabelle III.

Nullpunkt	Ausschlag	Differenz
7,92		
(7,99)	15,43	7,44
8,05		
(8,08)	15,46	7,38
8,11		
(8,14)	15,53	7,39
8,17		
(8,15)	15,57	7,42
8,12		
Mittel		7,40

Das bei der ersten Messungsreihe verwandte Zeitintervall von 30 Sek. ist somit für die Herstellung des Gleichgewichtes hinreichend und wurde deshalb für die späteren Messungen benutzt.

Als erstes Beispiel der photometrischen Auswertung der Platte möge die untenstehende Tabelle angeführt werden. Das Telephon (von L. M. Erikson, Stockholm) wurde mit gewöhnlichem Wechselstrom unter Vorschaltung eines passenden

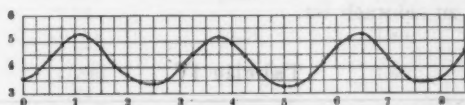
Widerstandes betrieben. Bei diesen niedrigen Frequenzen ist zu erwarten, daß die Telephonmembrane der aufgedrückten Stromvariation vollkommen folgt. Die graphische Wiedergabe der Tabelle zeigt eine sinusförmige Kurve. (Es ist zu erwähnen, daß eben diese Platte nicht besonders gut ist.) Für derartige Frequenzen würde man sogar diese Registriermethode als Oszillograph benutzen können, nämlich in den Fällen, wo die zu untersuchende Stromstärke für die oszillographische Registrierung zu schwach ist.

Tabelle IV.

Verschiebung der Platte	Nullpunkt	Ausschlag	Differenz	Verschiebung der Platte	Nullpunkt	Ausschlag	Differenz
0,00	11,41 (11,54) 11,68	15,11	3,57	4,25	11,58 (11,56) 11,53	16,02	4,46
0,25	(11,77) 11,87	15,58	3,81	4,50	(11,51) 11,49	15,32	3,81
0,50	(11,92) 11,97	16,28	4,36	5,00	(11,43) 11,40	14,70	3,27
0,75	(12,00) 12,04	16,87	4,87	5,25	(11,40) 11,39	14,71	3,31
1,00	(12,04) 12,05	17,27	5,23	5,50	(11,36) 11,32	15,03	3,67
1,25	(12,06) 12,07	17,20	5,14	5,75	(11,32) 11,31	15,51	4,19
1,50	(12,06) 12,05	16,78	4,72	6,00	(11,26) 11,21	16,01	4,75
1,75	(12,04) 12,02	16,11	4,07	6,25	(11,21) 11,22	16,35	5,14
2,00	(12,01) 11,99	15,69	3,68	6,50	(11,22) 11,22	16,47	5,25
2,25	(11,95) 11,90	15,39	3,44	6,75	(11,19) 11,17	16,11	4,92
2,50	(11,93) 11,96	15,26	3,33	7,00	(11,13) 11,09	15,42	4,20
2,75	(11,95) 11,94	15,46	3,51	7,25	(11,08) 11,07	14,87	3,79
3,00	(11,89) 11,84	15,87	3,98	7,50	(11,04) 11,01	14,48	3,44
3,25	(11,83) 11,82	16,34	4,51	7,75	(11,00) 10,98	14,47	3,47
3,50	(11,75) 11,68	16,69	4,94	8,00	(10,99) 11,00	14,54	3,55
3,75	(11,65) 11,61	16,81	5,14	8,25	(11,02) 11,04	15,02	4,00
4,00	(11,60) 11,58	16,51	4,91	8,50	(11,03) 11,02	15,69	4,66

Es ist zu bemerken, daß die Einstellung der Empfindlichkeit nach den Amplitüden der vorhandenen Schwingungen gewählt werden muß, um eine richtige Wiedergabe zu erzielen. Die Spaltbreite muß m. a. W. so groß genommen werden, daß eine vollkommene Ablendung des Lichtes nicht eintreten kann. Bisweilen können aber die Amplitüden unerwartet hohe Werte

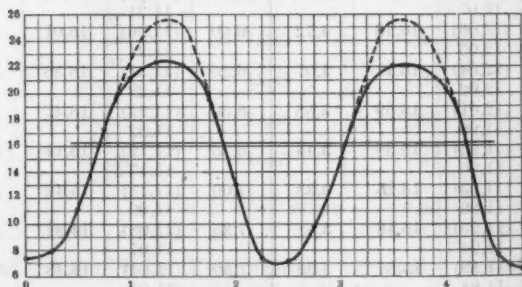
Wechselstrom; Platte 50.



Graphische Tabelle IV.

durch Resonanz erreichen, die eine Verzerrung der Schwingungskurve zur Folge hat. Eine derartige Aufnahme zeigt Platte 61. bei welcher das Telephon mit hochfrequentem Wechselstrom von derselben Periode wie die erste Eigenschwingung der Membrane beschickt wurde. Durch die auftretende Beugung des Lichtes, die bei dieser Spaltbreite zur Geltung kommt, werden die diskontinuierlichen Übergänge ein wenig gemildert.

Wechselstrom; Resonanz; Platte 61.



Graphische Tabelle V.

In der graphischen Tabelle ist außer der ausgemessenen Kurve noch die wirkliche Schwingungskurve markiert unter der Voraussetzung, daß die letztere symmetrisch um die Mittellinie läuft.

Tabelle V.
Wechselstrom; Resonanz; Platte 61.

Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag
0,00	9,93	2,53 (2,58) 2,64	7,35	2,50	10,77	3,59 (3,64) 3,70	7,13
0,25	10,62	(2,64) 2,64 (2,70)	7,98	2,75	13,61	(3,74) 3,78 (3,82)	9,87
0,50	13,84	2,77 (2,83) 2,89	11,14	3,00	18,87	(3,87) 3,88 (3,90)	15,05
0,75	20,06	(2,93) 2,98 (3,03)	17,23	3,25	24,34	3,92 (3,95) 3,99	20,47
1,00	24,11	(3,15) 3,21 (3,26)	21,18	3,50	25,92	(4,02) 4,06 (4,09)	22,02
1,25	25,40	3,32 (3,39) 3,46	22,37	4,00	24,45	4,12 (4,16) 4,21	21,99
1,50	25,27	(3,53) 3,59	22,12	4,25	18,14	(4,24) 4,28	20,43
1,75	22,78		19,52	4,50	11,82		14,05
2,00	16,41		13,02				7,66
2,25	10,91		7,38	4,75	11,80		6,56

Als Beispiel der Leistungsfähigkeit der Methode seien einige Schwingungskurven der Telephonmembrane bei der Wiedergabe verschiedener Vokale mitgeteilt. Die ausgemessenen Photogramme sind in den Tafeln wiederzufinden. Es sei nochmals hervorgehoben, daß die reproduzierten Kurven nicht zur phonetischen Charakteristik der Vokale dienen sollen, sondern den Schwingungsverlauf der *Telephonmembrane* demonstrieren sollen. Die Kurven sind bei demselben Vokal je nach der Tonhöhe sehr verschieden, wie schon aus phonetischen Gründen zu erwarten ist. Außer dieser phonetischen Veränderung der Vokale mit der Tonhöhe kommt hier auch die Einwirkung der Eigenschwingungen der Membrane zur Geltung.

Eine sehr typische Schwingungskurve zeigt der Vokal *ä*, wie aus untenstehender Messungsreihe zu ersehen ist. Die verschiedenen Perioden wiederholen sich zwar nicht identisch; es ist aber sehr wohl möglich, daß diese fehlende Übereinstimmung im Vokale selbst liegt, wenn auch die Messungen eine solche detaillierte Richtigkeit nicht sicherstellen können. Es ist jedoch zu bemerken, daß die Vergrößerung etwa die hunderttausendfache ist.

Tabelle VI.

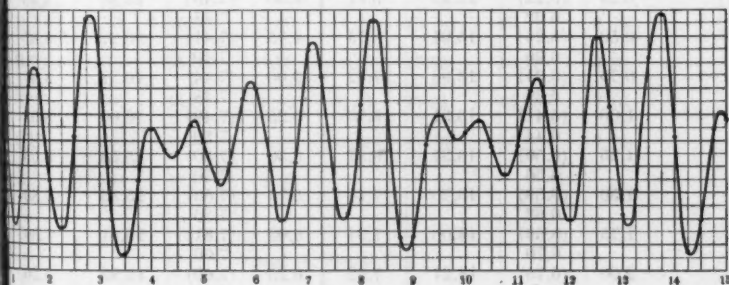
Vokal ä; Platte 38.

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
0,00	10,72 (10,75) 10,79	22,22	11,47	6,00	11,46 (11,46) 11,47	26,41	14,95
0,25	(10,84) 10,89	24,78	13,94	6,25	(11,48) 11,49	23,90	12,42
0,50	(10,90) 10,92	25,73	14,83	6,50	(11,49) 11,50	21,42	9,93
0,75	(10,95) 10,99	23,50	12,55	6,75	(11,50) 11,51	23,65	12,15
1,00	(11,01) 11,03	20,91	9,90	7,00	(11,52) 11,53	28,00	16,48
1,25	(11,05) 11,07	21,81	10,76	7,25	(11,53) 11,54	26,93	15,40
1,50	(11,07) 11,08	26,15	15,08	7,50	(11,56) 11,59	22,67	11,11
1,75	(11,10) 11,12	26,60	15,50	7,75	(11,60) 11,62	21,79	10,19
2,00	(11,14) 11,16	22,57	11,43	8,00	(11,62) 11,63	25,98	14,36
2,25	(11,18) 11,20	20,80	9,62	8,25	(11,62) 11,61	29,22	17,60
2,50	(11,20) 11,21	24,35	13,15	8,50	(11,60) 11,58	26,08	14,48
2,75	(11,22) 11,23	28,85	17,63	8,75	(11,59) 11,60	20,84	9,25
3,00	(11,25) 11,28	27,22	15,97	9,00	(11,60) 11,61	20,89	9,29
3,25	(11,29) 11,30	21,28	9,99	9,25	(11,61) 11,61	24,44	12,83
3,50	(11,31) 11,33	19,93	8,62	9,50	(11,61) 11,60	25,58	13,97
3,75	(11,34) 11,35	22,80	11,46	9,75	(11,61) 11,62	24,80	13,19
4,00	(11,36) 11,37	24,82	13,46	10,00	(11,61) 11,60	24,87	13,26
4,25	(11,37) 11,38	24,00	12,63	10,25	(11,60) 11,61	25,37	13,76
4,50	(11,38) 11,39	23,90	12,52	10,50	(11,61) 11,62	24,38	12,77
4,75	(11,40) 11,41	24,97	13,57	10,75	(11,63) 11,64	23,32	11,69
5,00	(11,41) 11,42	24,37	12,96	11,00	(11,65) 11,66	24,45	12,80
5,25	(11,42) 11,42	22,89	11,47	11,25	(11,65) 11,63	26,56	14,91
5,50	(11,44) 11,46	23,57	12,13	11,50	(11,64) 11,65	26,33	14,69
5,75	(11,46) 11,46	26,05	14,59	11,75	(11,65) 11,64	23,24	11,59

Tabelle VI (Fortsetzung).

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
12,00	11,64 (11,64)	21,62	9,98	13,75	11,61 (11,63)	29,45	17,82
12,25	11,63 (11,63)	24,79	13,16	14,00	11,66 (11,67)	24,80	13,13
12,50	11,63 (11,62)	28,58	16,96	14,25	11,68 (11,68)	20,39	8,71
12,75	11,61 (11,62)	25,89	14,27	14,50	11,67 (11,68)	21,64	9,96
13,00	11,63 (11,65)	21,79	10,14	14,75	11,69 (11,69)	25,12	13,43
13,25	11,68 (11,68)	22,77	11,09	15,00	11,70 (11,70)	25,49	13,79
13,50	11,69 (11,65)	27,84	16,19		11,70		
	11,61						

Vokal ä; Platte 38.



Graphische Tabelle VI.

Die Kurve zeigt einen sehr glatten Verlauf, der aber auch dadurch vorgetäuscht werden könnte, daß die ausgemessenen Punkte zu weit entfernt sind. Vor allem ist bemerkenswert, daß überlagerte Oberschwingungen nicht zu sehen sind. Um ein genaues Verfolgen der Schwingungskurve zu ermöglichen und dadurch eventuelle Oberschwingungen hervortreten zu lassen, wurde bei demselben Vokale eine Platte mit größerer Geschwindigkeit aufgenommen und mit demselben Intervall ausgemessen. Die Tonhöhe dieser Vokale ist nicht ganz dieselbe wie die vorige; sie zeigt aber ganz denselben typischen

Verlauf (eine gedämpfte Sinusschwingung mit 3 bis 4 Schwingungen). Oberschwingungen sind auch hier nicht zu sehen. Es liegt dies vermutlich darin begründet, daß das verwandte Telephon (L. M. Ericsson, Stockholm) eine verhältnismäßig dicke und steife Membrane besitzt, die eventuelle Oberschwingungen unterdrücken. Spätere Aufnahmen mit einem Telephon (von Apel, Göttingen) mit dünnerer Membrane ergaben dagegen relativ kräftige Oberschwingungen.

Tabelle VII.

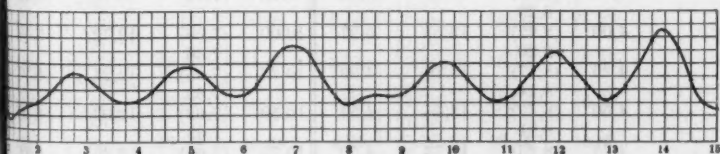
Vokal ä; Platte 52.

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
0,00	6,18 (6,20) 6,22	15,68	9,48	4,25	7,33 (7,36) 7,40	15,27	7,91
0,25	(6,22) 6,22	15,83	9,61	4,50	(7,40) 7,41	15,86	8,46
0,50	(6,26) 6,30	15,01	8,75	4,75	(7,41) 7,40	16,22	8,81
0,75	(6,34) 6,39	13,96	7,62	5,00	(7,44) 7,48	16,28	8,84
1,00	(6,41) 6,44	13,31	6,90	5,25	(7,49) 7,50	16,00	8,51
1,25	(6,50) 6,56	13,37	6,87	5,50	(7,50) 7,50	15,53	8,03
1,50	(6,59) 6,62	13,70	7,11	5,75	(7,53) 7,56	15,33	7,80
1,75	(6,66) 6,70	14,00	7,34	6,00	(7,61) 7,66	15,41	7,80
2,00	(6,75) 6,80	14,27	7,52	6,25	(7,69) 7,72	15,89	8,20
2,25	(6,85) 6,90	14,72	7,87	6,50	(7,73) 7,74	16,64	8,91
2,50	(6,97) 7,04	15,30	8,33	6,75	(7,73) 7,72	17,30	9,57
2,75	(7,06) 7,09	15,69	8,63	7,00	(7,71) 7,70	17,36	9,65
3,00	(7,13) 7,18	15,60	8,47	7,25	(7,71) 7,72	17,03	9,32
3,25	(7,20) 7,22	15,28	8,08	7,50	(7,74) 7,76	16,22	8,48
3,50	(7,26) 7,30	14,91	7,65	7,75	(7,76) 7,76	15,48	7,72
3,75	(7,31) 7,32	14,82	7,51	8,00	(7,76) 7,76	15,21	7,45
4,00	(7,32) 7,33	14,92	7,60	8,25	(7,77) 7,78	15,43	7,66

Tabelle VII (Fortsetzung).

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
	7,78				7,79		
8,50	(7,78)	15,57	7,79	12,00	(7,80)	17,12	9,32
	7,79				7,82		
8,75	(7,76)	15,50	7,74	12,25	(7,82)	16,62	8,80
	7,72				7,82		
9,00	(7,71)	15,50	7,79	12,50	(7,82)	16,06	8,24
	7,69				7,83		
9,25	(7,70)	15,83	8,13	12,75	(7,78)	14,48	7,70
	7,70				7,73		
9,50	(7,70)	16,38	8,68	13,00	(7,72)	15,40	7,68
	7,69				7,70		
9,75	(7,69)	16,70	9,01	13,25	(7,70)	15,84	8,14
	7,69				7,71		
10,00	(7,69)	16,61	8,92	13,50	(7,73)	16,71	8,98
	7,70				7,75		
10,25	(7,74)	16,12	8,38	13,75	(7,76)	17,63	9,87
	7,78				7,78		
10,50	(7,75)	15,64	7,89	14,00	(7,77)	18,00	10,23
	7,72				7,76		
10,75	(7,72)	15,32	7,60	14,25	(7,79)	17,37	9,58
	7,71				7,82		
11,00	(7,70)	15,39	7,69	14,50	(7,82)	16,18	8,36
	7,69				7,81		
11,25	(7,69)	15,81	8,12	14,75	(7,81)	15,26	7,45
	7,68				7,81		
11,50	(7,69)	16,41	8,72	15,00	(7,78)	15,00	7,22
	7,70				7,75		
11,75	(7,74)	17,01	9,27				
	7,79						

Vokal ä; Platte 52.



Graphische Tabelle VII.

Die nachstehenden Tabellen zeigen den Schwingungsvorgang der Membrane bei den Vokalen *u* (schwed. *o*) bzw. *a* (schwed.) in zwei verschiedenen Tonhöhen. Wir werden die Kurven weiter unten erörtern.

Tabelle VIII.

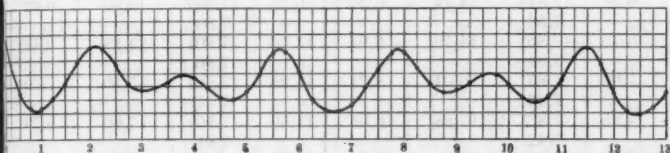
Vokal *u* (schwed. *o*); Platte 53: I.

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
	8,41				8,03		
0,00	(8,40)	15,18	6,78	6,00	(8,02)	13,56	5,54
	8,38				8,00		
0,25	(8,39)	14,27	5,88	6,25	(8,00)	12,51	4,51
	8,41				8,01		
0,50	(8,43)	13,18	4,75	6,50	(8,01)	12,12	4,11
	8,46				8,00		
0,75	(8,48)	12,68	4,20	6,75	(7,96)	12,02	4,06
	8,51				7,92		
1,00	(8,53)	12,70	4,17	7,00	(7,91)	12,19	4,28
	8,56				7,90		
1,25	(8,56)	13,10	4,54	7,25	(7,93)	12,87	4,94
	8,57				7,96		
1,50	(8,56)	13,67	5,11	7,50	(7,93)	13,58	5,65
	8,55				7,90		
1,75	(8,54)	14,44	5,90	7,75	(7,87)	14,11	6,24
	8,53				7,84		
2,00	(8,51)	14,97	6,46	8,00	(7,86)	14,15	6,29
	8,49				7,88		
2,25	(8,46)	14,88	6,42	8,25	(7,88)	13,60	5,72
	8,42				7,88		
2,50	(8,45)	14,28	5,83	8,50	(7,88)	12,94	5,06
	8,48				7,88		
2,75	(8,43)	13,52	5,09	8,75	(7,85)	12,62	4,77
	8,39				7,82		
3,00	(8,39)	13,24	4,85	9,00	(7,84)	12,67	4,83
	8,39				7,86		
3,25	(8,39)	13,32	4,93	9,25	(7,84)	12,98	5,14
	8,38				7,81		
3,50	(8,34)	13,51	5,17	9,50	(7,78)	13,22	5,44
	8,30				7,74		
3,75	(8,26)	13,69	5,43	9,75	(7,73)	13,15	5,42
	8,23				7,71		
4,00	(8,22)	13,53	5,31	10,00	(7,69)	12,72	5,03
	8,20				7,66		
4,25	(8,17)	13,10	4,93	10,25	(7,65)	12,24	4,59
	8,14				7,63		
4,50	(8,17)	12,74	4,57	10,50	(7,63)	12,03	4,40
	8,21				7,63		
4,75	(8,23)	12,73	4,50	10,75	(7,64)	12,26	4,62
	8,26				7,65		
5,00	(8,24)	13,03	4,79	11,00	(7,66)	12,88	5,22
	8,21				7,67		
5,25	(8,20)	13,67	5,47	11,25	(7,66)	13,74	6,08
	8,19				7,64		
5,50	(8,15)	14,39	6,24	11,50	(7,61)	14,09	6,48
	8,10				7,58		
5,75	(8,07)	14,38	6,31	11,75	(7,60)	13,40	5,80
	8,03				7,62		

Tabelle VIII (Fortsetzung).

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
12,00	7,62 (7,63)	12,36	4,73	12,75	7,69 (7,68)	11,88	4,20
12,25	7,65 (7,65)	11,69	4,04	13,00	7,66 (7,67)	12,42	4,75
12,50	7,65 (7,67)	11,61	3,94		7,68		

Vokal u (schwed. o); Platte 53 : I.



Graphische Tabelle VIII.

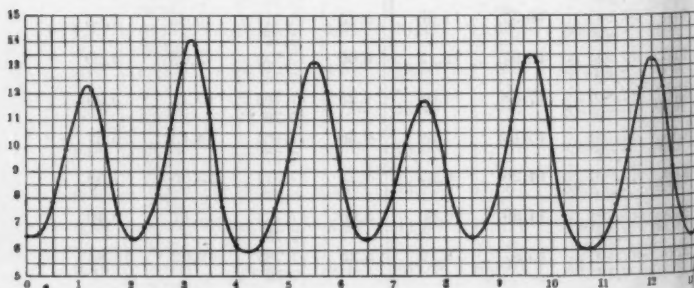
Tabelle IX.

Vokal u (schwed. o); Platte 53 : II.

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
0,00	8,14 (8,14)	14,66	6,52	2,75	7,72 (7,71)	18,39	10,68
0,25	8,14 (8,11)	14,79	6,68	3,00	7,70 (7,69)	20,85	13,16
0,50	8,08 (8,04)	15,85	7,81	3,25	7,68 (7,68)	21,54	13,86
0,75	8,00 (7,97)	17,80	9,83	3,50	7,68 (7,69)	18,96	11,27
1,00	7,94 (7,91)	19,57	11,66	3,75	7,70 (7,71)	15,34	7,63
1,25	7,88 (7,84)	19,97	12,13	4,00	7,72 (7,73)	13,93	6,20
1,50	7,80 (7,80)	17,88	10,08	4,25	7,74 (7,75)	13,71	5,96
1,75	7,79 (7,79)	15,18	7,39	4,50	7,76 (7,76)	14,13	6,37
2,00	7,78 (7,79)	14,26	6,47	4,75	7,77 (7,77)	15,35	7,58
2,25	7,80 (7,79)	14,59	6,80	5,00	7,77 (7,77)	17,17	9,40
2,50	7,78 (7,75)	15,87	8,12	5,25	7,78 (7,78)	19,62	11,84
	7,72				7,78		

Tabelle IX (Fortsetzung).

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
	7,78				7,79		
5,50	(7,78)	20,96	13,18	9,75	(7,78)	20,99	13,21
	7,78				7,77		
5,75	(7,79)	19,86	12,07	10,00	—	—	—
	7,80				—		
6,00	(7,80)	16,85	9,05	10,25	(7,78)	15,08	7,30
	7,80				7,79		
6,25	(7,81)	14,68	6,87	10,50	(7,79)	13,98	6,19
	7,82				7,80		
6,50	(7,84)	14,24	6,40	10,75	(7,80)	13,83	6,03
	7,86				7,80		
6,75	(7,85)	14,79	6,94	11,00	(7,80)	14,28	6,48
	7,84				7,80		
7,00	(7,83)	16,04	8,21	11,25	(7,80)	15,50	7,70
	7,82				7,81		
7,25	(7,82)	17,88	10,06	11,50	(7,80)	17,60	9,79
	7,82				7,81		
7,50	(7,81)	19,32	11,51	11,75	(7,81)	19,93	12,12
	7,80				7,82		
7,75	(7,79)	19,09	11,30	12,00	(7,82)	21,09	13,27
	7,78				7,82		
8,00	(7,79)	16,82	9,03	12,25	(7,82)	20,00	12,18
	7,80				7,83		
8,25	(7,80)	14,82	7,02	12,50	(7,84)	16,95	9,11
	7,80				7,85		
8,50	(7,81)	14,30	6,49	12,75	(7,85)	14,83	6,98
	7,82				7,86		
8,75	(7,82)	14,82	7,00	13,00	(7,86)	14,32	6,46
	7,82				7,87		
9,00	(7,81)	16,30	8,49	13,25	(7,87)	14,77	6,90
	7,80				7,88		
9,25	(7,80)	18,72	10,92	13,50	(7,87)	15,96	8,09
	7,79				7,86		
9,50	(7,79)	20,94	13,15				
	7,79						



Graphische Tabelle IX. Vokal u (schwed. o) Platte 53 : II.

Tabelle X.

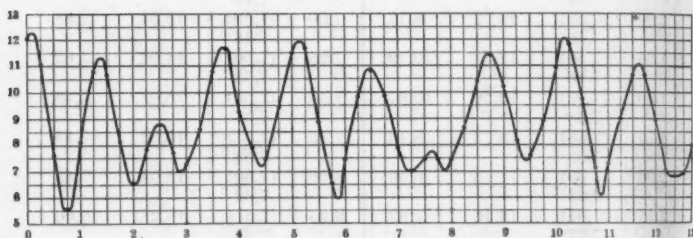
Vokal α ; Platte 39: I.

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
	7,43				7,72		
0,00	(7,48)	19,53	12,05	6,00	(7,72)	15,16	7,44
	7,54				7,72		
0,25	(7,54)	18,62	11,08	6,25	(7,67)	17,47	9,80
	7,55				7,62		
0,50	(7,56)	15,07	7,51	6,50	(7,59)	18,39	10,80
	7,57				7,55		
0,75	(7,54)	13,12	5,58	6,75	(7,52)	17,36	9,84
	7,51				7,49		
1,00	(7,55)	15,72	8,17	7,00	(7,49)	15,37	7,88
	7,59				7,48		
1,25	(7,59)	18,38	10,79	7,25	(7,50)	14,52	7,02
	7,60				7,53		
1,50	(7,59)	18,26	10,67	7,50	(7,55)	15,03	7,48
	7,58				7,57		
1,75	(7,58)	15,73	8,15	7,75	(7,57)	15,02	7,45
	7,58				7,58		
2,00	(7,59)	14,15	6,56	8,00	(7,60)	15,03	7,43
	7,61				7,62		
2,25	(7,64)	15,46	7,82	8,25	(7,61)	16,27	8,66
	7,67				7,60		
2,50	(7,64)	16,42	8,78		7,53		
	7,61			8,50	(7,53)	17,94	10,41
2,75	(7,60)	15,32	7,72		7,53		
	7,59			8,75	(7,51)	18,93	11,42
3,00	(7,59)	14,88	7,29		7,49		
	7,58			9,00	(7,50)	17,71	10,21
3,25	(7,59)	16,19	8,60		7,51		
	7,61			9,25	(7,53)	15,68	8,15
3,50	(7,60)	18,36	10,76		7,56		
	7,59			9,50	(7,56)	15,17	7,61
3,75	(7,58)	19,26	11,68		7,56		
	7,56			9,75	(7,57)	16,49	8,92
4,00	(7,56)	17,81	9,25		7,59		
	7,57			10,00	(7,60)	18,52	10,92
4,25	(7,57)	15,46	7,89		7,61		
	7,58			10,25	(7,61)	19,45	11,84
4,50	(7,58)	15,05	7,47		7,60		
	7,58			10,50	(7,60)	17,34	9,74
4,75	(7,57)	17,00	9,43		7,61		
	7,56			10,75	(7,64)	14,77	7,13
5,00	(7,56)	19,06	11,50		7,67		
	7,56			11,00	(7,60)	14,89	7,29
5,25	(7,57)	19,25	11,68		7,53		
	7,59			11,25	(7,49)	16,49	9,00
5,50	(7,63)	16,60	8,87		7,45		
	7,67			11,50	(7,47)	18,10	10,63
5,75	(7,68)	14,23	6,54		7,50		
	7,72						

Tabelle X (Fortsetzung).

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
11,75	7,50 (7,53)	18,18	10,65	12,50	7,56 (7,56)	14,37	6,81
12,00	7,56 (7,56)	16,52	8,96	12,75	7,56 (7,57)	14,50	6,93
12,25	7,56 (7,56)	14,59	7,03	13,00	7,59 (7,59)	15,09	8,00
	7,56				7,59		

Vokal a; Platte 39 : I.



Graphische Tabelle X.

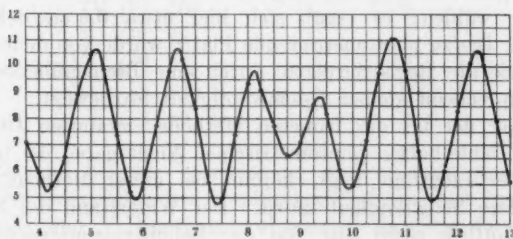
Tabelle XI.

Vokal a; Platte 53 : II.

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
3,75	8,36 (8,33)	15,41	7,08	5,75	8,21 (8,20)	13,41	5,21
4,00	8,30 (8,30)	14,22	5,92	6,00	8,19 (8,19)	13,72	5,53
4,25	8,29 (8,29)	13,72	5,43	6,25	8,20 (8,20)	15,92	7,72
4,50	8,29 (8,28)	14,79	6,51	6,50	8,20 (8,16)	17,95	9,79
4,75	8,27 (8,25)	17,16	8,91	6,75	8,12 (8,14)	18,39	10,25
5,00	8,22 (8,22)	18,64	10,42	7,00	8,16 (8,13)	16,53	8,40
5,25	8,21 (8,21)	18,10	9,89	7,25	8,10 (8,10)	13,64	5,54
5,50	8,20 (8,20)	15,55	7,35	7,50	8,10 (8,10)	13,07	4,97
	8,21				8,10		

Tabelle XI (Fortsetzung).

Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Null- punkt	Galv.- Ablesung	Aus- schlag
	8,10				7,90		
7,75	(8,08)	15,43	7,35	10,50	(7,89)	17,61	9,72
	8,05				7,88		
8,00	(8,03)	17,39	9,36	10,75	(7,88)	18,89	11,03
	8,00				7,84		
8,25	(8,00)	17,10	9,10	11,00	(7,83)	17,66	9,83
	8,01				7,82		
8,50	(8,05)	15,76	7,71	11,25	(7,82)	14,54	6,72
	8,10				7,82		
8,75	(8,10)	14,70	6,60	11,50	(7,82)	12,72	4,90
	8,09				7,82		
9,00	(8,09)	15,18	7,09	11,75	(7,82)	13,82	6,00
	8,09				7,83		
9,25	(8,08)	16,63	8,55	12,00	(7,81)	16,10	8,29
	8,07				7,79		
9,50	(8,04)	16,20	8,16	12,25	(7,79)	17,90	10,11
	8,01				7,79		
9,75	(8,00)	14,02	6,02	12,50	(7,80)	17,84	10,04
	7,99				7,81		
10,00	(7,99)	13,41	5,42	12,75	(7,80)	15,70	7,90
	7,99				7,79		
10,25	(7,95)	15,09	7,14	13,00	(7,80)	13,40	5,60
	7,90				7,82		

Vokal *a*; Platte 53: II.

Graphische Tabelle XI.

B. Mit Selenzelle.

Das beschriebene Verfahren liefert zwar sehr gute Kurven, ist aber verhältnismäßig zeitraubend, wenn eine längere Strecke ausgemessen werden soll. Eine weit bequemere Methode zur Auswertung der Photogramme ergibt sich unter Zuhilfenahme eines registrierenden Galvanometers, der automatisch die

Schwingungskurven zeichnet. Die in dieser Weise aufgenommenen Kurven sind mit einem Saitengalvanometer nach Eindhoven aufgenommen, wobei als photometrisches Instrument eine Selenzelle benutzt wurde.¹⁾ Einige vorbereitende Messungen zeigten, daß die Thermosäule mit Rücksicht auf den hohen Widerstand des Quarzfadens zu kleine Ausschläge gab. Diese Schwierigkeit ist wohl durch Einsetzen eines anderen Fadens zu überwinden. Die Selenzelle besitzt aber wegen ihrer größeren Reaktionsgeschwindigkeit gewisse Vorteile, wenn auch diese ersten Aufnahmen nicht ganz einwandfrei sind. Die Übereinstimmung der in verschiedener Weise aufgenommenen Kurven zeigen, daß die Unterschiede nicht unzulässig groß sind. Ich hoffe in einer nächsten Arbeit diese Auswertung verbessern zu können, wobei in erster Linie eine wesentlich schmalere Lichtlinie verwandt werden soll. Es ist nämlich zu befürchten, daß schärfere Übergänge bei diesen Ausmessungen ausgeglichen worden sind.

Die Veränderung der früher beschriebenen Meßeinrichtung bestand darin, daß die zu photometrierende Platte mit konstanter Geschwindigkeit vorgeschoben wurde. Die Belichtung der Selenzelle und damit der Ausschlag des Galvanometers änderte sich dann mit der Schwärzung der Platte. Die Geschwindigkeit der Registrierung war selbstverständlich nicht zu groß zu wählen; es ergab sich hier etwa 0,5 cm/Sek. als passend. Die zu photometrierende Platte wurde von demselben Motor wie die Registrierplatte durch eine Riemenübersetzung mit entsprechend kleiner Geschwindigkeit fortbewegt.

Außer der bei der früheren Methode erwähnten Ursache zu einer fehlerhaften photometrischen Wiedergabe, die in der Breite der Lichtlinie liegt, kommt bei dieser Methode noch eine andere Schwierigkeit hinzu. Der Widerstand des Selen ist bekanntlich nicht nur von der Belichtungsintensität abhängig, sondern auch von der Zeitdauer derselben. Die hierdurch entstehende Verzerrung ist aber nicht so bedeutend, weil die wesentliche Änderung in der ersten Sekunde vollzogen wird. Es kann diese Fehlerzeichnung als eine Änderung der

1) Durch das freundliche Entgegenkommen des Direktors des hiesigen Physiologischen Instituts, Herrn Prof. Dr. med. T. Thunberg, wurde mir zu diesem Zwecke der vorzügliche Saitengalvanometer des Institutes zur Verfügung gestellt.

Nullage aufgefaßt werden, die aber wegen der Periodizität der Plattenschwingung ziemlich gering ist. Außerdem zeigen die Platten andere wesentlich größere Änderungen der Nullage von kontinuierlichem Charakter, die bisweilen eine Aufnahme unbrauchbar machen konnten. Für die Deutung der Kurven sind sie aber belanglos, wenn nur die Ausschläge innerhalb der Platte fallen. Um den Galvanometerfaden bei der Registrierung nicht mit einem konstanten Gleichstrom zu belasten, was bei direkter Schaltung nötig wäre, wurde die Selenzelle in eine Wheatstone'sche Brückenkombination eingesetzt und durch einen ebenso großen Widerstand (20 000—50 000 Ω) kompensiert. Der andere Zweig der Brücke bestand aus einem Ruhstratwiderstand, mit dem dann eine grobe Einstellung auf Stromlosigkeit erzielt wurde. Die genaue Einstellung wurde durch eine besondere Kompensationshilfsspannung erreicht.

Daß trotz der genannten Mängel, die übrigens mit mehr geeigneten Hilfsmitteln zu beseitigen sind, Kurven zu erreichen waren, welche den Verlauf des Schwingungsvorganges im wesentlichen richtig darstellen, zeigt eine Vergleichung der direkt (punktweise) ausgemessenen Kurven mit den registrierten. Die einander entsprechenden Kurven sind:

Graphische Tabelle	Registrierplatte
IV (Pl. 50)	7
VI (Pl. 38)	1
VII (Pl. 52)	15
VIII (Pl. 53 : I)	2
X (Pl. 39 : I)	6

Es sind bei der Vergleichung die verschiedenen Platten mit den entsprechenden graphischen Tabellen mit ihren richtigen X- und Y-Richtungen abzulesen, da diese bisweilen in den zwei Figuren nicht übereinstimmen.

§ 5. Schätzung der Amplitüdengröße der schwingenden Membrane.

Die Vergrößerung.

Die Größe der Amplitüden bei den in verschiedenen Photogrammen reproduzierten Schwingungskurven ist nicht direkten Messungen zugänglich. Vielmehr muß man sich hier mit einer

ganz rohen Schätzung begnügen, die folgendermaßen ausgeführt werden kann:

Die Vergrößerung des letzteren Mikroskopes betrug etwa 50, das von ihm entworfene Spaltbild hatte eine Breite von 0,1 mm. Es war somit die wirkliche Spaltbreite etwa $\frac{1}{500}$ mm. Schätzungsweise wollen wir ferner annehmen, daß die Variationen der Spaltbreite bei den Bewegungen der Membrane etwa 10 Proz. betrug; dann bekommen wir als Wert der Maximalamplitude

$$0,0002 \text{ mm.}$$

Bei den nach der späteren Methode photometrierten Kurven betragen die Amplitüden etwa 20 mm, was also eine wirkliche Amplitude von 0,0002 mm bedeutet; 1 mm würde somit 0,00001 mm entsprechen. Die erzielte Vergrößerung kann daher etwa auf das Hunderttausendfache angesetzt werden. Bei den nach der Thermosäulenmethode ausgemessenen Kurven würde sie noch größer sein.

§ 6. Die theoretische Behandlung der schwingenden Membrane.

In mathematischer Hinsicht stehen verschiedene Wege zur Behandlung der schwingenden Telephonmembrane zur Verfügung. Die vollkommene Lösung mit Berücksichtigung aller Umstände läßt sich wegen der Kompliziertheit des Phänomens nicht ausführen, sondern man wird genötigt sein, den Vorgang entweder von dem einen oder dem anderen Gesichtspunkte aus zu behandeln. Auf solche Weise gelingt es doch, ein gutes Gesamtbild des Phänomens zu entwerfen.

A. Die Telephonmembrane als unendlich dünne, frei schwingende Platte.

Für alle schwingenden Systeme sind die Eigenschwingungen als das Primäre zu betrachten, aus diesen setzt sich der wirkliche Schwingungsvorgang durch Überlagerung zusammen, wobei Amplitudenverhältnis und Phase für jede Schwingung charakteristisch ist. Die Eigenschwingungen lassen sich experimentell dadurch hervorbringen, daß die Membrane von einer periodischen Kraft erregt wird, die dieselbe Periode wie die Eigenschwingung besitzt (eigentlich gelingt dies nur bei „loser Kuppelung“).

Die theoretische Behandlung geht von der für eine gleichmäßig gespannte Membrane gültigen Differentialgleichung aus:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2K}{\mu} \frac{1 + 3\theta}{1 + \theta} a \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right]$$

(siehe Kirchhoff, Mechanik p. 464). K, μ, θ, a sind Konstanten, ξ die Ausbiegung der Punkte x, y bei Zeitpunkt t . Setzen wir

$$(2) \quad c^2 = \frac{2K}{\mu} \frac{1 + 3\theta}{1 + \theta} a,$$

so wird die zu lösende Gleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right],$$

die wir jetzt nur im Falle *kreisrunder* Membrane zu behandeln haben. Wir führen dann Polarkoordinaten r, θ ein, wobei (3) sich folgendermaßen transformieren läßt:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right].$$

Wird ferner ξ als eine harmonische Funktion der Zeit von der Form $\cos(p t - \varepsilon)$ vorausgesetzt, so ist

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + k^2 \xi = 0,$$

$$(6) \quad k = \frac{p}{c}.$$

Als Lösung dieser Gleichung setzen wir die Reihe an:

$$(7) \quad \xi = \xi_0 + \xi_1 \cos(\theta + \alpha_1) + \xi_2 \cos 2(\theta + \alpha_2) + \dots$$

$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ sind Funktionen von r allein. Dann gilt für ξ_n :

$$(8) \quad \frac{d^2 \xi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \xi_n}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \xi_n = 0.$$

Die uns interessierende Lösung dieser Gleichung ist die Besselsche Funktion n ter Ordnung

$$J_n(kr)$$

Die Koeffizienten dieser Reihe können aus der Differentialgleichung direkt ermittelt werden. Mit z als Argument kann J_n geschrieben werden

$$(9) \quad J_n(z) = \frac{z^n}{2^n |n+1|} \left[1 - \frac{z^2}{2 \cdot 2n+2} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n+2 \cdot 2n+4} - \dots \right].$$

Diese Reihe ist für alle n und z konvergent; für höhere z -Werte ist aber die Konvergenz sehr langsam, warum dann eine andere Reihe für numerische Rechnungen benutzt werden kann.

Eine Lösung bei transversellen Schwingungen kann geschrieben werden:

$$(10) \quad \xi_n = P \cdot J_n(kr) \cos n(\theta + \alpha) \cos(pt + \epsilon).$$

Dazu kommt als Grenzbedingung das Stillbleiben der Begrenzung, d. h. für

$$r = a$$

$$(11) \quad J_n(ka) = 0.$$

Die vollständige Lösung ergibt sich durch Zusammensetzung aller dieser Eigenschwingungen.

Aus der Gleichung (10) können gewisse Schlußfolgerungen betreffs der Eigenschwingungen gezogen werden. Die erste Reihe dieser ergibt sich bei dem Werte

$$n = 0.$$

Dann wird ξ eine Funktion von r allein, und jede Knotenlinie muß der Gleichung

$$(12) \quad J_0(kr) = 0$$

genügen. Für alle anderen Töne erhält man für die Knotenlinien die Gleichungen

$$(13) \quad J_n(kr) \cos n(\theta + \alpha) = 0.$$

Die Gleichung zerfällt in zwei:

$$(14) \quad J_n(kr) = 0$$

und

$$(15) \quad \cos n(\theta + \alpha) = 0,$$

von denen die letztere sofort gelöst werden kann durch:

$$(16) \quad n(\theta + \alpha) = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

oder

$$(17) \quad \theta = (2m + 1) \frac{\pi}{2n} - \alpha,$$

wo m eine ganze Zahl ist. Es entspricht dies einer Reihe von n Diametern als Knotenlinien.

Die zwei Gleichungen (12) und (14) geben uns dagegen

mit dem Rand konzentrische Kreise, deren Radien R_n der Gleichung genügen:

$$(18) \quad J_n(k R_n) = 0.$$

Setzen wir wieder $z_n = k R_n$ als Argument, so gibt die Gleichung (18) eine Reihe möglicher z_n -Werte.

$$(19) \quad z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, z_n^{(3)}, \dots$$

mit entsprechendem R_n -Werte

$$(20) \quad R_n^{(1)}, R_n^{(2)}, R_n^{(3)}, \dots$$

Die z_n -Werte denken wir uns dabei nach ihrer Größe geordnet. Dann entspricht $z_n^{(1)}$ dem tiefsten Ton in jeder Gruppe, die

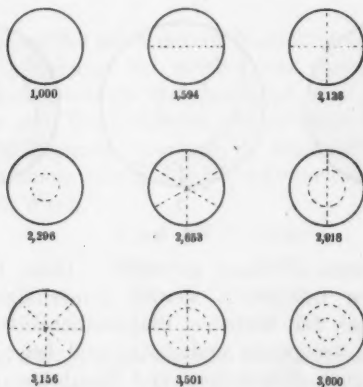


Fig. 7.

dadurch gekennzeichnet ist, daß keine zirkulären Knotenlinien vorhanden sind. Der Grundton der Membrane gibt $z_0^{(1)}$, wo also keine Knotenlinien auftreten.

Von diesen theoretisch möglichen Eigenschwingungen werden in unserem Falle nicht alle auftreten können, wenigstens nicht mit genügender Intensität. Zur besseren Beurteilung dieser Frage sind in Fig. 7 die Knotenlinien bei den 9 tiefsten Tönen nebst dem Verhältnis ihrer Schwingungszahlen angegeben. Bei Überschreiten einer Knotenlinie wird immer der Schwingungszustand umgekehrt; die an zwei Stellen der Membrane wirkende Kraft ist aber gleichgerichtet und würde daher

bisweilen der Bewegung entgegenwirken. In diesem Umstand liegt wohl die Ursache dazu, daß der erste gefundene Oberton im allgemeinen dem sechsten theoretischen entspricht.

Die theoretische Behandlung setzt selbstverständlich eine vollkommen homogene Membrane voraus. Inwieweit diese Voraussetzung erfüllt ist, darüber gibt die Fig. 8 Aufschluß. Beim Erregen des Telephons mit Wechselstrom von derselben Frequenz wie der Grundton wurde der wirklich schwingende Teil der Membrane untersucht. Dies konnte einfach durch Auflegen z. B. der Spitze eines Bleistiftes auf die Membrane gemacht werden.

Beim Überschreiten der in der Figur gezeichneten Grenze zwischen dem schraffierten und dem unschraffierten Teil wurde

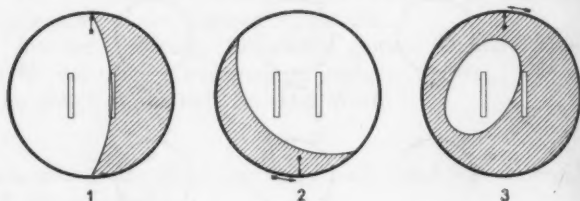


Fig. 8.

der Bleistift zum Mittönen gebracht. Diese Grenze konnte ziemlich genau festgestellt werden (innerhalb etwa 2 mm). Fig. 8, 1 ist bei der höchsten Empfindlichkeit des Telephons aufgenommen, die zweite und dritte sind bei einem größeren Abstand zwischen Polschuhen und Membrane erhalten. Die Membrane war dabei fest in eine Ringfassung montiert, und der Abstand wurde durch Drehung der Fassung geändert. Die Drehrichtung wird durch den äußeren Pfeil angegeben, während der andere Pfeil einen festen Punkt der Membrane markiert. Die Figuren sind so zu verstehen, daß der ganze schraffierte Teil die Bewegung nicht mitmacht.

Die bei dieser Aufnahme verwandte Membrane gehörte einem in der Laboratoriumspraxis viel gebrauchten Telephon, das nicht immer der besten Behandlung unterzogen worden war. So viel ist aber klar, daß man bei wirklichen Membranen sehr weit von den theoretisch geforderten Bedingungen entfernt ist. Als Hörtelephon arbeitet jedoch das genannte Telephon ganz vorzüglich.

B. Als schwingender Massenpunkt.

Wenn auch die oben besprochenen Eigenschaften der Membrane nicht außer acht gelassen werden dürfen, so ist doch für die theoretische Diskussion eine andere Behandlungsweise mehr ergiebig. Man sieht dabei ganz ab von dem speziellen Charakter des schwingenden Körpers als eines zweidimensionalen Gebildes und setzt die gewöhnlichen für einen schwingungsfähigen Massenpunkt gültigen Differentialgleichungen ein. Es eröffnet sich hier auch die Möglichkeit, die elektrischen Vorgänge mit in Berechnung zu ziehen. Wir wollen aber diese vollständigere Behandlung einer anderen Arbeit vorbehalten, wo eine komparative Untersuchung des Mikrophons und Telephons durch gleichzeitige Registrierung der Schwingungen dargelegt werden soll.

Selbstverständlich kann es sehr fraglich erscheinen, ob eine derartige Vereinfachung, bei welcher nur eine einzige Eigenschwingung berücksichtigt wird, gestattet ist. Beim Erregen des Telephons mit Wechselstrom von steigender Periode sind jedoch mehrere Eigenschwingungen zu konstatieren. Ich gebe hier eine Zusammenstellung der Eigenfrequenzen einiger Telephone nach M. Wien.¹⁾

Bell	1100	2800	6500
Apel	1060	2500	5600
Siemens I	720	2100	5000
Siemens II	750	2350	5400

Über diese Werte hinaus konnten noch mehrere Eigenschwingungen festgestellt werden. Aus dieser Zusammenstellung ist zu schließen, daß die obengenannte vereinfachende Annahme nur in beschränkter Übereinstimmung mit der Wirklichkeit steht, und daß die sich daraus ergebenden Resultate mit größter Vorsicht behandelt werden müssen. Es kommt aber nicht nur auf die Menge der Oberschwingungen an, es spielt auch ihre relative Intensität eine gewisse Rolle. In dieser Hinsicht sind einige Aufnahmen bei verschiedenen Telephonen sehr instruktiv. Wird die Membrane aus ihrer Gleichgewichtslage durch einen konstanten Strom gebracht und in einem bestimmten Zeitpunkt sich selbst überlassen (durch momentanes Abbrechen des Stromes), so führt die Membrane Schwingungen um ihre Gleich-

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 4. p. 454. 1901.

gewichtslage aus. Diese Schwingungen sind aber wegen der verschiedenen möglichen Eigenschwingungen bisweilen von sehr komplizierter Natur. Derartige Kurven sind z. B. von Hartmann-Kempf in seiner oben zitierten Arbeit gegeben. Eigene Aufnahmen bei einem Apeltephone zeigten auch diese ganz verworrenen Bilder. Anders verhält sich aber ein von mir verwandtes Telephon von L. M. Eriesson (Stockholm) wohl wegen der größeren Dicke der Membrane. Die Membrane nimmt hier ihre Gleichgewichtslage mit sehr regelmäßigen gedämpften Schwingungen wieder ein. Die Ausmessung der Platte gibt Tabelle XII wieder.

Tabelle XII.

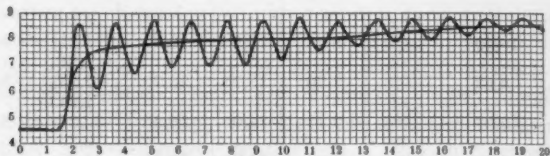
Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag
0,00	6,81	2,23 (2,23)	4,58	4,00	9,30	1,86 (1,84)	7,46
0,25	6,82	2,24 (2,24)	4,58	4,25	8,62	1,81 (1,81)	6,81
0,50	6,82	2,25 (2,24)	4,58	4,50	8,80	1,80 (1,81)	6,99
0,75	6,80	2,23 (2,23)	4,57	4,75	9,69	1,82 (1,81)	7,88
1,00	6,76	2,23 (2,22)	4,54	5,00	10,40	1,80 (1,80)	8,60
1,25	6,71	2,21 (2,20)	4,51	5,25	10,12	1,80 (1,83)	8,29
1,50	6,79	2,19 (2,19)	4,60	5,50	9,38	1,86 (1,87)	7,51
1,75	7,47	2,18 (2,18)	5,29	5,75	8,86	1,88 (1,88)	6,98
2,00	9,37	2,17 (2,14)	7,23	6,00	9,20	1,88 (1,86)	7,34
2,25	10,63	2,10 (2,08)	8,55	6,25	10,02	1,84 (1,83)	8,19
2,50	8,90	2,06 (2,03)	7,77	6,50	10,47	1,82 (1,82)	8,65
2,75	8,51	2,00 (1,98)	6,53	6,75	10,03	1,83 (1,85)	8,18
3,00	8,12	1,96 (1,95)	6,17	7,00	9,16	1,87 (1,87)	7,29
3,25	9,02	1,94 (1,93)	7,09	7,25	8,91	1,87 (1,87)	7,04
3,50	10,27	1,92 (1,90)	8,37	7,50	9,50	1,88 (1,89)	7,61
3,75	10,29	1,88 (1,87)	8,42	7,75	10,41	1,90 (1,91)	8,50
		1,86				1,92	

Tabelle XII (Fortsetzung).

Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag	Ver- schie- bung	Galv.- Ablesung	Null- punkt	Aus- schlag
		1,92				2,20	
8,00	10,40	(1,92)	8,48	13,50	10,90	(2,21)	8,69
		1,92				2,22	
8,25	9,63	(1,93)	7,70	13,75	10,79	(2,23)	8,56
		1,94				2,24	
8,50	9,07	(1,96)	7,11	14,00	10,40	(2,25)	8,15
		1,98				2,26	
8,75	9,33	(1,98)	7,35	14,25	10,21	(2,27)	7,94
		1,98				2,28	
9,00	10,23	(1,98)	8,25	14,50	10,42	(2,28)	8,14
		1,99				2,28	
9,25	10,68	(1,99)	8,69	10,75	10,91	(2,27)	8,64
		1,99				2,26	
9,50	10,21	(1,99)	8,22	15,00	10,99	(2,27)	8,72
		2,00				2,28	
9,75	9,59	(2,00)	7,59	15,25	10,62	(2,28)	8,34
		2,01				2,29	
10,00	9,30	(2,01)	7,29	15,50	10,32	(2,29)	8,03
		2,01				2,29	
10,25	10,00	(2,01)	7,99	15,75	10,30	(2,27)	8,03
		2,01				2,25	
10,50	10,67	(2,01)	8,66	16,00	10,67	(2,24)	8,43
		2,00				2,22	
10,75	10,66	(1,99)	8,67	16,25	10,98	(2,21)	8,77
		1,98				2,20	
11,00	10,03	(1,97)	8,06	16,50	10,89	(2,19)	8,70
		1,95				2,18	
11,25	9,62	(1,95)	7,67	16,75	10,52	(2,17)	8,35
		1,96				2,15	
11,50	9,72	(1,98)	7,74	17,00	10,29	(2,13)	8,16
		2,00				2,10	
11,75	10,19	(2,00)	8,19	17,50	10,76	(2,10)	8,66
		2,01				2,09	
12,00	10,57	(2,01)	8,56	18,00	10,76	(2,09)	8,67
		2,02				2,09	
12,25	10,49	(2,02)	8,47	18,50	10,43	(2,09)	8,34
		2,03				2,08	
12,50	10,11	(2,03)	8,07	19,00	10,80	(2,08)	8,72
		2,04				2,07	
12,75	9,82	(2,05)	7,77	19,50	10,71	(2,07)	8,64
		2,06				2,07	
13,00	10,01	(2,09)	7,92	20,00	10,42	(2,04)	8,38
		2,13				2,03	
13,25	10,57	(2,16)	8,41				
		2,20					

Die betreffende Schwingungskurve gilt für die Membran-
mitte. Für die Mehrzahl der Oberschwingungen würde bei

homogener Membrane eben an dieser Stelle ein Knotenpunkt liegen. Die Aufnahme zeigt jedoch, daß die Grundschiwingung die Oberschwingungen wesentlich überwiegt, und daß



Graphische Tabelle XII.

somit für dieses Telephon die vereinfachte Theorie eine gewisse Gültigkeit beanspruchen kann.

Diese Betrachtungsweise rührt von Wietlisbach her und ist später von Poincaré weiter entwickelt worden. Mit Hilfe der gewonnenen Schwingungskurve ist es uns jetzt möglich, die nötigen Konstanten zu bestimmen. Für die Ausbiegung u gilt bei Annahme einer periodischen Kraft $KJ_{\max} \sin \omega t$ folgende Differentialgleichung:

$$(1) \quad M \frac{d^2 u}{dt^2} + R \frac{du}{dt} + Eu = KJ_{\max} \sin \omega t,$$

deren Lösung ist:

$$(2) \quad \begin{cases} u = \frac{KJ_{\max}}{\sqrt{R^2 \omega^2 + (E - M\omega^2)^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{R\omega}{E - M\omega^2} \right) + \\ + C e^{-\frac{R}{2M}t} \sin \left(\frac{\sqrt{4EM - R^2}}{2M} t - \alpha + \frac{\pi}{2} \right). \end{cases}$$

C und α sind zwei Integrationskonstanten. Wird jetzt die Kraft gleich Null vorausgesetzt, z. B. $J_{\max} = 0$, so führt die Membrane freie Schwingungen aus. Die Lösung wird dann:

$$(3) \quad u = C e^{-\frac{R}{2M}t} \sin \left(\frac{\sqrt{4EM - R^2}}{2M} t - \alpha + \frac{\pi}{2} \right).$$

Die Verhältnisse zweier nacheinander folgender Amplituden derselben Richtung ist:

$$(4) \quad q = \frac{a_0}{a_1} = e^{\frac{R}{2M}t},$$

wo τ die Schwingungszeit bedeutet. Wir erhalten

$$(5) \quad \lg q = \frac{R}{2M} \tau.$$

Durch Bestimmung des logarithmischen Dekrements und die Schwingungszeit τ können wir aus dieser Formel die Konstanten R/M ermitteln. Die Schwingungszeit τ der Grundschwingung wurde in der Weise bestimmt, daß das Telephon durch eine Wiensche Wechselstromsirene erregt wurde unter stetiger Erhöhung der Schwingungszahl bis über die Eigenfrequenz der Membrane. Die Amplituden der Membranschwingungen wurden dabei auf einem Film registriert. Das Resonanzgebiet war durch seine bedeutend kräftigeren Amplituden zu erkennen. Die Zeitmarkierung geschah hierbei mit einer Stimmgabel. Die Messung gab die Schwingungszahl n :

$$n = 780$$

$$\text{d. h. } \tau = \frac{1}{80}.$$

Das logarithmische Dekrement wurde aus der Schwingungskurve (Tab. XII) ermittelt. Man erhält

$$q = 1,14$$

und somit

$$(6) \quad \frac{R}{M} = 2 \cdot 10^3.$$

Ferner ergibt die Rechnung für E/M

$$(7) \quad \frac{E}{M} = 6 \cdot 10^7.$$

Die Konstanten der Differentialgleichung sind hierdurch experimentell ermittelt worden. Wir werden in einer nächsten Arbeit die Einwirkung der elektrischen Stromkreise auf diese Faktoren untersuchen.

Schlußbemerkung.

Die hier angegebene Methode zur photographischen Registrierung der Membranschwingungen kann selbstverständlich bei passender Wahl der Membrane für phonetische Zwecke

(nach Art der Hermannschen Methode) verwandt werden. Es ist hierbei von großer Wichtigkeit, daß man die Photogramme umgekehrt als „sprechende Films“ mit einer Selenzelle benutzen kann, wobei eine Kontrolle gegeben ist, ob der Film den betreffenden Laut richtig aufgefaßt hat.

Es wurden auch bei der Untersuchung einige einfache Worte registriert, die zwar sehr interessant zu studieren sind, aber als Material betrachtet ohne Bedeutung und daher nicht reproduziert worden sind.

Lund, Physikalisches Institut, 28. Mai 1913.

(Eingegangen 11. August 1913.)

2. Die Entstehungsweise von Kombinationstönen im Mikrophon-Telephonkreis; von E. Waetzmann.

Einleitung.

Im Jahre 1905 veröffentlichte Karl L. Schaefer¹⁾ die für die Entwicklung der Theorie der Kombinationstöne (KT.) äußerst wichtige Beobachtung, daß ein Stentortelephon, welches mit einem Mikrophon in Reihe geschaltet ist, objektive KT. ergibt, wenn dem Mikrophon gleichzeitig zwei Primärtöne (PT.) von passendem Intervall und genügender Stärke zugeleitet werden. Karl Schaefer kam zu der Ansicht, daß die Erzeugung der KT. der Telephonmembran als solcher zugeschrieben werden müsse; und auch in Zukunft hielt man an dieser Ansicht fest. Ich glaubte in den Karl Schaefer'schen Versuchen insofern eine Bestätigung der Helmholtz'schen Theorie der KT. erblicken zu dürfen, als die Telephonmembran von dem Magneten einseitig beeinflusst wird und dadurch für Schwingungen nach einem Kraftgesetz, wie es die Helmholtzsche Theorie fordert (rücktreibende Kraft = $ax + bx^2$) besonders geeignet erscheint. Quantitative Untersuchungen waren aber nicht möglich, solange die Schwingungen der Telephonmembran nicht graphisch aufgezeichnet wurden. In einer gemeinsam mit Hrn. G. Mücke²⁾ ausgeführten Untersuchung haben wir die Schwingungen der Telephonmembran mit Hilfe der Martensschen Spiegelanordnung³⁾ und eines lichtempfindlichen rotierenden Papierstreifens photographiert und auf diesem Wege zum erstenmal tatsächlich Klangkurven erhalten, in denen sich KT. nachweisen lassen. Die durch

1) Karl L. Schaefer, Ann. d. Phys. 17. p. 572. 1905.

2) E. Waetzmann und G. Mücke, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. p. 59. 1913.

3) F. F. Martens, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 7. p. 63. 1909.

Analyse der Kurven gewonnenen Resultate stimmen teilweise mit den Forderungen der Helmholtzschen Theorie überein, und teilweise lassen sie sich auf einen Ansatz zurückführen, den Cl. Schaefer¹⁾ zur Herleitung der KT. gemacht hat. Gewisse auffallende Beobachtungen ließen es trotzdem erwünscht erscheinen, systematisch zu untersuchen, welcher Anteil an der Entstehung der KT. den einzelnen Elementen des Mikrophon-Telephonkreises zukommt. Nur auf diesem Wege konnte eine endgültige Entscheidung über die Theorie der Erscheinung erzielt werden.

§ 1. Die Schwingungen der Telephon- und Mikrophonmembranen.

Zunächst wurden Telephon und Mikrophon gesondert untersucht. Da die Membran des benutzten lautsprechenden Telephons sehr unempfindlich ist, so mußte, um sie durch direkt auftreffende Luftschwingungen zu genügend starkem Mitschwingen zu bringen, Resonanz benutzt werden. Außerdem wurde gegebenenfalls die Empfindlichkeit der Martensschen Spiegelanordnung dadurch auf das Zwei- oder Dreifache erhöht, daß der Lichtstrahl an den beiden Spiegeln nicht einmal, sondern zwei- oder dreimal hin und her reflektiert wurde. Bei den benutzten kleinen Galvanometerspiegeln erfordert das natürlich eine sehr sorgfältige Justierung. Die Eigenschwingungen der Telephonmembran wurden auf folgende Weise bestimmt: Das Telephon wird mit einer Stromquelle verbunden und der Elektromagnet geschlossen; der Lichtstrahl

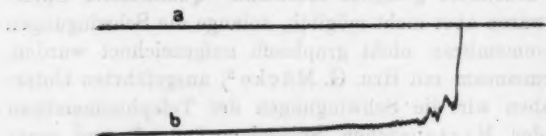


Fig. 1.

zeichnet dann auf den dauernd rotierenden lichtempfindlichen Papierstreifen eine gerade Linie (a, Fig. 1). Jetzt wird der Strom geöffnet, und die Membran schwingt in ihren Eigenperioden nach der neuen Ruhelage b hinüber. Bevor der

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 33. p. 1216. 1910.

Papierstreifen eine ganze Umdrehung gemacht hat, muß der Beleuchtungsspalt wieder geschlossen werden, was durch elektromagnetische Auslösungen erreicht wurde. Aus Fig. 1 können die absoluten Werte der Eigenschwingungszahlen der Membran entnommen werden, wenn bei gleichbleibender Rotationsgeschwindigkeit noch die Schwingungen einer Stimmgabel von bekannter Periode photographiert werden. Fig. 1 zeigt drei deutlich ausgeprägte Eigenschwingungen der Membran; die mittlere liegt bei 650 Schwingungen pro Sekunde. Auf die genauere Bestimmung der beiden anderen wurde kein Wert gelegt, da sie für die vorliegende Untersuchung nur wenig in Betracht kamen.

Nachdem die Eigenschwingungen bestimmt waren, wurde die Membran von dem Verbindungsstück mit dem Elektromagneten abgeschraubt, für sich befestigt und direkt durch Töne aus der Gegend von 650 Schwingungen erregt. Um genügend starke Töne zu erhalten, wurden Pfeifen überblasen und die dabei auftretenden Obertöne benutzt. Durch allmähliche Änderung der Höhe der erregenden Töne erhielt ich sehr hübsch die Resonanzkurve der Membran, die hier aber nicht

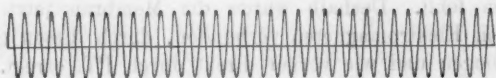


Fig. 2.

wesentlich interessiert. Die Schwingungen der Membran wurden jetzt in der Weise photographiert, daß durch eine erstmalige Exposition die Nullinie (Membran in Ruhe) aufgenommen wurde und durch eine zweite Belichtung, während welcher die Membran durch einen Ton erregt wurde, ihre Schwingungen darüber gelagert wurden. Fig. 2 zeigt, daß die Schwingungen der Membran symmetrisch zur Ruhelage erfolgen, und einfach sinusförmig sind.

Die getreue Wiedergabe des einen Tones durch die Membran ließ schon erwarten, daß sich zwei Primärschwingungen in ihr ungestört (also ohne K.T. zu bilden) überlagern werden. Tatsächlich ist Fig. 3, die durch Übereinanderlagerung der Schwingungen zweier P.T. von den Schwingungszahlen ca. 630

und 700 entstanden ist, das Bild einer typischen Schwebungskurve. Ohne eingehende Analyse ist aus ihr ohne weiteres zu ersehen, daß die Telephonmembran, wenn sie ohne Vermittlung eines Mikrophons und des Elektromagneten direkt durch zwei PT. erregt wird, wenn überhaupt, so nur verschwindend schwache KT. bildet. Übrigens zeigt die Schwebungskurve Fig. 3, daß das Intervall 700 : 630 etwas verstimmt war, was

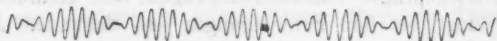


Fig. 3.

sich beim Arbeiten mit starken Pfeifentönen kaum vermeiden läßt. Überhaupt sind die technischen Schwierigkeiten in der Ausführung der Versuche ziemlich bedeutende. Sie sind aber derart, daß jeder, der ähnliche Experimente anstellt, die Hauptschwierigkeiten bald übersieht, so daß ich mir ein näheres Eingehen darauf ersparen darf.

Es lag nun die Vermutung sehr nahe, daß das Fehlen von KT. in der unter der Einwirkung zweier PT. resultierenden Schwingung der Membran darauf zurückzuführen sei, daß die einseitige Beeinflussung der Membran durch den Elektromagneten fehlt. Deshalb wurde die Membran jetzt wieder mit ihrem Elektromagneten verbunden, durch diesen einseitig durchgebogen und wie vorher direkt durch PT. erregt. Aber auch die so erhaltenen Kurven zeigen die KT., wenn überhaupt, so jedenfalls so schwach, daß ich nach meinem bisherigen Beobachtungsmaterial ihre Existenz nicht mit Sicherheit behaupten möchte. Übrigens sind diese Untersuchungen, da die Membran jetzt noch unempfindlicher ist als ohne Einwirkung des Magneten, noch entsprechend schwieriger als die vorhergehenden.

In analoger Weise wie die Schwingungen der Telephonmembran wurden die der Mikrophonmembran (gewöhnliches Körnermikrophon) untersucht. Ihre hauptsächlichste Eigenschwingung lag in der Gegend von 1300 Schwingungen. Es genügt hier, das Resultat anzugeben, daß die sämtlichen aufgenommenen Kurven von dem Vorhandensein von KT. nichts erkennen lassen, daß vielmehr stets ungestörte Superposition stattfindet.

Das bisherige Ergebnis ist also das, daß die Mikrophon- und Telephonmembranen an sich für die Erzeugung der im kombinierten Mikrophon-Telephonkreis in überraschender Stärke auftretenden KT. keine wesentliche Rolle spielen, auch nicht unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Telephonmembran durch den Magneten einseitig beeinflusst wird.

§ 2. Der kombinierte Mikrophon-Telephonkreis.

Sobald Mikrophon und Telephon mit einer Stromquelle in Reihe geschaltet werden, und zwei PT. auf das Mikrophon einwirken, sind in der resultierenden Schwingung der Telephonmembran KT. enthalten; und zwar in der Regel so stark, daß man ihr Vorhandensein in der photographisch aufgenommenen Kurve auch ohne genauere Analyse derselben erkennt. In Fig. 4 ist eine solche Kurve abgebildet. Die PT. sind dieselben wie in Fig. 3, nämlich 630 und 700 Schwingungen. Während aber Fig. 3 die Schwingungen der Telephonmembran

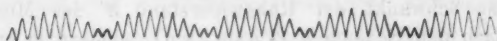


Fig. 4.

zeigt, wenn sie direkt durch die beiden PT. erregt wird, sind ihr in Fig. 4 die PT. durch das Mikrophon zugeleitet. Übrigens zeigt auch Fig. 4 eine Verstimmung des Intervalls, was für unsere Zwecke aber nicht wesentlich stört. Vor allem aber zeigt Fig. 4 nicht mehr das Bild einer typischen Schwebungskurve, sondern eine stark ausgeprägte Unsymmetrie. Wer in der Deutung solcher Kurven etwas Erfahrung hat, sieht sofort, daß in ihr neben den PT. $p = 700$ und $q = 630$ noch eine Komponente $p - q$, also der Differenzton (DT.) erster Ordnung enthalten ist. Ein Teil der aufgenommenen Kurven wurden mit dem Repsoldschen Koordinatenmeßapparat ausgemessen und berechnet.¹⁾ Die genaue Analyse von Fig. 4 ergibt die Amplituden von p , q und $p - q$ zu 3,7 bzw. 2,4 bzw. 2,2 mm.

Um nun die Wirkungsweise des kombinierten Mikrophon-Telephonkreises aufzuklären, wurden dem Mikrophon jetzt

1) Die Analyse eines Teiles der Kurven hat Hr. cand. phil. F. Küstner ausgeführt.

Einzeltöne zugeleitet und die dadurch erregten Schwingungen der Telefonmembran photographiert. Zunächst wurde wieder, nachdem der Elektromagnet geschlossen war, die Nulllinie photographiert und darauf die Schwingungen. In Fig. 5 sind zwei Proben der so erhaltenen Kurven gegeben. Man sieht zunächst, daß die Schwingungen — im Gegensatz zu denen in Fig. 2 — auch nicht annähernd symmetrisch zur Ruhelage sind; und

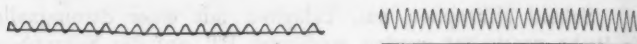


Fig. 5.

zwar ist die einseitige Verschiebung der Schwingungskurve gegenüber der Nulllinie um so größer, je stärker und je höher die das Mikrophon erregenden Töne sind. Die Verschiebung liegt in der Richtung, daß sie eine Vergrößerung des Widerstandes des Mikrophons anzeigt. Das heißt also, wenn die Mikrophonmembran in sinusförmige Schwingungen versetzt wird, so schwankt der Ruhewiderstand W des Mikrophons nicht nach dem Schema $W + a \sin 2\pi p t$, sondern er erhält die Form $W_1 + a \sin 2\pi p t$, wobei $W_1 > W$ ist. Dabei ist die Größe von $W_1 - W$ von der Stärke und Höhe des erregenden Tones abhängig; außerdem ändert sie sich sehr stark mit der zufälligen Konstellation innerhalb des Mikrophons. Bei dem hauptsächlich benutzten Körnermikrophon, das auf einem Brettchen so montiert war, daß die Membran senkrecht stand, ergab sich aus immer wieder wiederholten Beobachtungen im Mittel folgendes Verhalten: Wird zunächst das Mikrophon kräftig geschüttelt, so zeigt es einen sehr großen Ruhewiderstand von über 100Ω ; wird jetzt die Membran durch einen kräftigen Ton eine Weile erregt, so nimmt der Ruhewiderstand allmählich ab bis auf etwa 25Ω , und das Mikrophon behält diesen kleinen Ruhewiderstand bei, solange es nicht wieder kräftig geklopft oder geschüttelt wird. Wir haben es hierbei also mit einer Art Kohärerwirkung zu tun, indem das Mikrophon unter dem Einfluß einer auffallenden Schwingung seinen Widerstand verkleinert. Bei den Kurvenaufnahmen hatte das Mikrophon in der Regel diesen verkleinerten Ruhewiderstand W . Fällt jetzt ein Ton auf, so wird dieser Widerstand während der Schwin-

gungen wieder etwas vergrößert, so daß er die Form $W_1 + a \sin 2\pi pt$ erhält. Hört nun der Ton auf, so nimmt das Mikrophon wieder den vorherigen Widerstand W an, oder auch einen noch etwas kleineren Widerstand, falls W noch nicht der minimale Ruhewiderstand war. Ein solcher Fall ist in Fig. 6 wiedergegeben, wo die Linie a die Nullage vor Ein-



Fig. 6.

wirkung des Tones darstellt, und b die Nullage nach Aufhören des Tones, die einem kleineren Widerstand entspricht. Gleichzeitig zeigt Fig. 6, wie die Widerstandszunahme des Mikrophons während der Erregung durch einen Ton bei kleinerer Amplitude desselben geringer als bei größerer ist. Die Kurve wurde in der Weise gewonnen, daß während der Belichtung die Intensität des erregenden Tones sehr schnell abnahm. Natürlich darf bei diesem Versuch der erregende Ton nicht gerade in der Nähe eines der Eigentöne der Membranen liegen; trotzdem wird er durch dieselben etwas gestört.

Aus den besprochenen Widerstandsänderungen des Mikrophons ergibt sich eine erschöpfende Erklärung des Zustandekommens der KT. im Mikrophon-Telephonkreis. Solange nur ein Ton von konstanter Amplitude übertragen wird, sind diese Widerstandsänderungen allerdings ziemlich uninteressant; das konstante Glied $W_1 - W$, das zu der sinusförmigen Schwankung hinzutritt, ändert nicht die treue Wiedergabe des Tones durch das Telephon. Sobald aber gleichzeitig zwei PT. dem Mikrophon zugeleitet werden, ist die $W_1 - W$ entsprechende Größe nicht mehr konstant, sondern in den Zeitmomenten, in welchen die Schwingungen der Mikrophonmembran kleine Amplituden haben, kleiner, als wenn die Membranschwingungen stark sind. Eine Schwebungskurve wie in Fig. 3, welche die Mikrophonmembran ausführt, muß also bei ihrer Übertragung auf die Telephonmembran vollkommen verzerrt werden, und zwar in dem Sinne, daß an den Stellen des Minimums der Elektromagnet die Telephonmembran besonders stark anzieht, weil ja während der Schwebungsminima das Mikrophon fast seinen Ruhe-

widerstand hat. Ich denke, daß auf diese Weise die Art der Überführung der Fig. 3 in Fig. 4 deutlich ist. Es ist ohne weiteres zu übersehen, daß hierdurch in der Telephonmembran ein starker Ton von der Schwingungszahl $p - q$ entstehen muß, da die Telephonmembran ja $p - q$ besonders starken Anziehungen pro Sekunde ausgesetzt ist.

Gegen das bisher Gesagte ließen sich die verschiedensten Einwände erheben, so namentlich, daß die Art der Widerstandsänderungen des Mikrophons, auf die ich ja im wesentlichen die Entstehung der KT. im Mikrophon-Telephonkreis zurückführe, unter Benutzung noch eines anderen Elementes dieses Kreises, nämlich des Telephons, gemessen wurde. Namentlich der Elektromagnet des Telephons kann dabei mancherlei Fälschungen geben. Es wurde deshalb das Telephon durch ein Saitengalvanometer ersetzt und die Schwingungen der Saite photographiert. Dabei erhielt ich zwar quantitativ etwas verschiedene, aber qualitativ vollkommen gleiche Kurven wie mit dem Telephon. Außerdem wurden die Widerstandsänderungen des Mikrophons in der Wheatstoneschen Brücke mit einem Saitengalvanometer untersucht. Zunächst wurde die Brücke auf den Ruhewiderstand des Mikrophons abgeglichen, und dann das Mikrophon durch Töne erregt, durch Einzeltöne und durch mehrere gleichzeitig. Das Saitengalvanometer war dabei so eingestellt, daß es auf die schnellen Widerstandsänderungen nicht reagierte, sondern nur Mittelwerte anzeigte. Sehr hübsch ist dabei die Beobachtung der Widerstandsänderungen bei Schwebungen, namentlich bei allmählich abklingenden, wie sie etwa durch zwei angestrichene Stimmgabeln erzeugt werden. Ich denke, daß es überflüssig ist, auf weitere Einzelheiten der Kontrollbeobachtungen einzugehen.

Als Resultat dieses Paragraphen möchte ich also aussprechen, daß die Entstehung von KT. im Mikrophon-Telephonkreis im wesentlichen auf die Art der Widerstandsänderung des Mikrophons unter dem Einfluß mehrerer PT. zurückzuführen ist, mit der Helmholtzschen Theorie der KT. also wenig oder gar nichts zu tun hat.

§ 3. Theoretisches.

Nachdem wir in § 2 die Hauptursache für die Entstehung der KT. aufgefunden haben, müssen wir jetzt noch die Einzel-

heiten besprechen, namentlich von welchen Faktoren die Zahl und die Intensität der entstehenden KT. abhängt. Wir gehen dazu am einfachsten von zwei PT. aus, die so nahe aneinander liegen, daß sie eine deutlich ausgeprägte Schwebungskurve geben, also etwa $p = 700$ und $q = 630$, wie in Fig. 3 und 4. Ist die Zahl der Minima einer solchen Schwebungskurve identisch mit der Periodenzahl derselben, wie im Falle $p : q = 10 : 9$, so kann die Fouriersche Analyse der Kurve keine anderen Periodenzahlen, also keine anderen Töne geben als $p - q$ und ganzzahlige Vielfache davon. Von wesentlicher Stärke kann im allgemeinen hier nur $p - q$ sein. Um die Amplitude von $p - q$ bei gegebenen Amplituden von p und q zu finden, ist die durch ungestörte Superposition von p und q entstehende Resultierende zu zeichnen und zu untersuchen, in welcher Weise die resultierenden Amplituden von Maximum zu Minimum übergehen.¹⁾ Das so gefundene Gesetz gibt die Art der Widerstandsänderungen des Mikrophons an, die sich den Widerstandsänderungen von der Form $W + a \sin 2\pi pt$ und $W + b \sin 2\pi qt$ überlagern. Allerdings tritt noch dadurch eine Komplikation ein, daß diese Widerstandsänderungen ihrer absoluten Größe nach verschieden ausfallen, je nach der augenblicklichen Konstellation des Mikrophons, der absoluten Stärke und der Höhenlage des Primärtonintervalls. Mit der eben skizzierten Untersuchung lassen sich also nur die relativen Amplituden der entstehenden KT. finden. Aber auch die Größe der Absolutwerte läßt sich annähernd voraussagen, wenn man noch die Größe von $W_1 - W$ für die PT. feststellt. Wähle ich z. B. Höhe und Stärke der PT. so, daß die Schwingungen der Telephonmembran bei jedem Einzelton um den Betrag ihrer Amplitude gegen die Nullage verschoben sind, und nehme ich an, was in allergrößter Annäherung vielleicht zutrifft, daß dann die Minima der resultierenden Kurve um etwa den doppelten Betrag der Primärampplituden gegen die Nullinie verschoben wären, wenn eben nicht an den Minimumstellen die starke Anziehung des Elektromagneten stattfände, so muß sich die Amplitude von $p - q$ etwa gleich

1) Vgl. hierzu: E. Waetzmänn, Über den Zusammenklang zweier einfachen Töne. *Physik. Zeitschr.* 12. p. 231. 1911.

der Amplitude der PT. ergeben. Hierbei ist aber noch die nicht zutreffende Annahme gemacht, daß das Mikrophon keine Trägheit besitzt, d. h., daß es den Amplitudenschwankungen der Resultierenden vollkommen folgt. Man darf erwarten, was sich auch experimentell bestätigt hat, daß der Widerstand des Mikrophons an den Minimumstellen nur dann vollkommen auf seinen Ruhewert zurückgehen wird, wenn die Minima gut ausgeprägt sind und nicht zu schnell aufeinander folgen. Andererseits wird der Mikrophonwiderstand, was ebenfalls experimentell bestätigt wurde, an den Minimumstellen noch unter seinen ursprünglichen Ruhewert hinuntergehen, wenn er vor Beginn des Versuches nicht auf seinen Minimalwert gebracht worden ist. Ist das Intervall der PT. so gewählt, daß die Zahl der Schwebungen mit der Periodenzahl der Resultierenden nicht zusammenfällt, wie z. B. bei $p : q = 8 : 5$, so zeigt eine ähnliche wie die obige Überlegung, daß dann die Chancen für das Auftreten des DT. zweiter Ordnung viel günstiger sind als vorher. Es ist dies schon daraus zu sehen, daß dann die einzelnen Minima nicht mehr einander äquivalent sind, und dadurch der Ton $p - q$ in bezug auf Intensität nicht mehr von vornherein bevorzugt ist. Ich möchte daran erinnern, daß man durch ähnliche Überlegungen auch einen ungefähren Überblick über das Stärkeverhältnis der Partialtöne eines Sirenenklanges erhält, wenn die Größe der einzelnen Löcher der angeblasenen Lochreihe nach einem gegebenen Gesetz variiert.

Um Mißverständnissen vorzubeugen möchte ich betonen, daß ich es durchaus nicht für ausgeschlossen halte, daß im Mikrophon-Telephonkreis auch noch KT. auf andere Weise entstehen, etwa nach dem Helmholtzschen Schema, oder dadurch, daß das Anziehungsgesetz der Telephonmembran durch den Elektromagneten ein sehr kompliziertes ist. Auf der anderen Seite zeigen aber die Versuche, daß diesen Möglichkeiten nur eine ganz untergeordnete Bedeutung zukommt. Die quantitativen Verhältnisse — aber auch nur diese — werden sich allerdings mit der Art der benutzten Telephone und Mikrophone stark ändern.

Zusammenfassend dürfen wir sagen: Im Mikrophon-Telephonkreis werden neben dem DT. erster Ordnung nur dann solche höherer Ordnung in merklicher Stärke auftreten, wenn die Minima

der durch ungestörte Superposition der *PT.* entstehenden Kurve einander nicht äquivalent sind. Der *DT.* erster Ordnung muß um so stärker sein, je kleiner das Intervall, also je deutlicher ausgeprägt die Minima sind; ebenso muß die Intensität der *KT.* mit wachsender Stärke und Höhe der *PT.* zunehmen.

§ 4. Experimentelle Prüfung der Theorie.

Die Überlegungen des dritten Paragraphen wurden durch annähernd 80 Kurvenaufnahmen bestätigt, wovon im folgenden einige Proben mitgeteilt werden. Ich möchte vorausschicken, daß nur sehr wenig Kurven aufgenommen wurden, von denen ich nicht vorher durch Überlegung richtig erkannt hätte, welchen allgemeinen Typ ihr Aussehen haben würde. Überraschend war nur die sehr geringe Stärke des *DT.* zweiter Ordnung; das ist einer der Punkte, die noch weiter untersucht werden. Wenn er aber auftrat, so war es unter den Bedingungen, die oben als günstig für sein Auftreten genannt sind. Als Tonquellen standen mir zur Verfügung ein Satz Stimmgabeln von 200—4000 Schwingungen, ein Satz Orgelpfeifen von 128—1024 Schwingungen, deren Anwendungsgebiet durch Benutzung ihrer Obertöne wesentlich erweitert wurde, ein Satz kleiner Glaspfeifchen zwischen 1800 und 3000 Schwingungen und zuletzt noch ein Satz anzublasender Flaschen zwischen etwa 60 und 1000 Schwingungen. Die Stimmgabeln von 1000—4000 Schwingungen wurden hauptsächlich zur Bestimmung der Tonhöhen der Pfeifen und Flaschen verwandt, unter Zuhilfenahme von *DT.* Um qualitative Kontrollbeobachtungen auszuführen, war die rotierende Trommel, die den lichtempfindlichen Papierstreifen trägt, mit einem Tachometer verbunden; außerdem wurden die Schwingungen der Telephonmembran direkt mit Resonatoren abgehört.

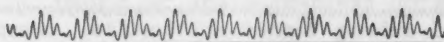


Fig. 7.

In Fig. 7 ist die gerade Linie die Nulllinie der Telephonmembran bei geschlossenem Elektromagneten. Die Schwingungen

kurve ist aus den PT. $p = 600$ und $q = 500$ entstanden. Die Analyse ergibt deren Amplituden zu 2,1 bzw. 1,8 mm, während die Amplitude von $p - q$ gleich 2,0 mm ist.

Die Kurven in Fig. 8 sind aus den PT. $p = 640$ und $q = 600$ entstanden. Die untere Kurve unterscheidet sich von

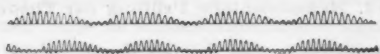


Fig. 8.

der oberen dadurch, daß vor Aufnahme der Kurve der Ruhe-
widerstand des Mikrophons noch etwas oberhalb seines Minimal-



Fig. 9.

wertes lag. Das gleiche ist noch stärker in Fig. 9 zu sehen; die PT. sind $p = 666,6$ und $q = 640$.

In Fig. 10 ist eine mit dem Saitengalvanometer statt

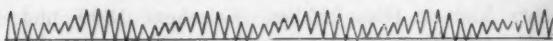


Fig. 10.

des Telephons aufgenommene Kurve wiedergegeben. Die PT. $p = 500$ und $q = 450$ haben die Amplituden 2,4 bzw. 1,4 mm, während die des DT. $p - q$ gleich 1,4 mm ist.

In Fig. 11 liegen die PT. bei etwa 3250 (Kurve I) bzw.

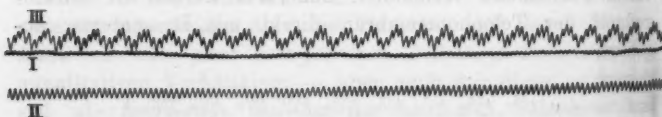


Fig. 11.

2710 (Kurve II). In der Resultierenden (Kurve III) ist die stark hervortretende Grundperiode die Periode des DT. $p - q$.

Man sieht ohne Analyse, daß hier die Amplitude des DT. bedeutend stärker als die der PT. ist, entsprechend der großen Höhe der PT. Die Schwankungen in I sind durch Schleudern der Trommel hervorgerufen.

Überraschend stark sind die KT. in den Kurven der Fig. 12. Die PT. sind die den Grundperioden aufgelagerten, in den verkleinerten Abbildungen kaum sichtbaren kleinen Zacken, während die Grundperioden dem DT. $p - q$ entsprechen. In allen vier Kurven war die Schwingungszahl $p = 3072$, während sich q von I nach IV hin der 3072 von ca. 2870 auf 2970 näherte. Die zu Kurve I gehörige obere gerade

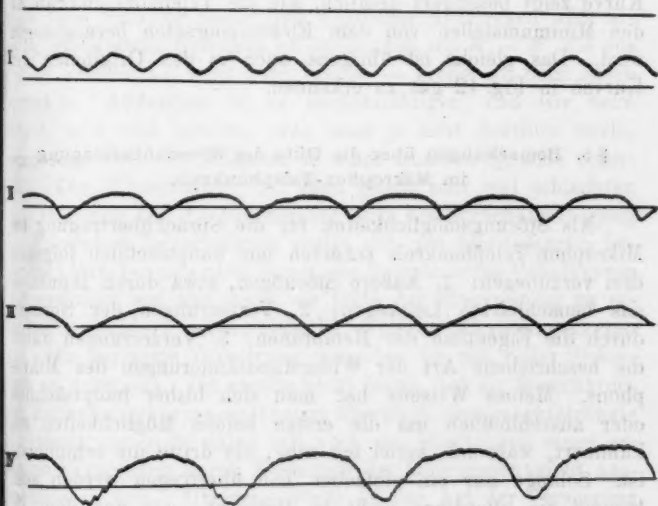


Fig. 12.

Linie ist die Nulllinie der Telefonmembran bei geöffnetem Elektromagneten, während die übrigen geraden Linien die Nulllinien bei geschlossenem Elektromagneten sind. In II—IV hatte das Mikrophon vor Aufnahme der Schwingungen noch nicht seinen minimalen Ruhewiderstand angenommen. Die Amplituden der DT. wachsen von I nach IV, entsprechend

der Verkleinerung des Intervalls der PT. In IV sind außerdem die Amplituden der PT. größer als in III, ebenso in II.

Ich denke, daß nach dem im dritten Paragraphen Gesagten eine weitere Erläuterung der Kurven überflüssig ist.

Endlich ist in Fig. 13 noch eine Schwingungskurve gegeben, die mit einem gewöhnlichen „Wackelmikrophon“ auf-

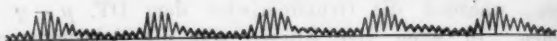


Fig. 13.

genommen ist. Die PT. sind $p = 640$ und $q = 600$. Die Kurve zeigt besonders deutlich, wie die Telephonmembran an den Minimumstellen von dem Elektromagneten herangezogen wird. Das gleiche ist übrigens auch in den Originalen der Kurven in Fig. 12 gut zu erkennen.

§ 5. Bemerkungen über die Güte der Sprachübertragung im Mikrophon-Telephonkreis.

Als Störungsmöglichkeiten für die Sprachübertragung im Mikrophon-Telephonkreis scheinen mir hauptsächlich folgende drei vorzuliegen: 1. Äußere Störungen, etwa durch Induktion aus benachbarten Leitungen; 2. Verzerrungen der Sprache durch die Eigentöne der Membranen; 3. Verzerrungen durch die beschriebene Art der Widerstandsänderungen des Mikrophons. Meines Wissens hat man sich bisher hauptsächlich oder ausschließlich um die ersten beiden Möglichkeiten gekümmert, während, soviel ich sehe, die dritte die schlimmste ist. Solange nur ein einfacher Ton übertragen werden soll, kommt sie allerdings nicht in Betracht, wie aus dem im zweiten Paragraphen Gesagten zu ersehen ist. Sobald aber aus mehreren Partialtönen zusammengesetzte Klänge, wie es beim Sprechen der Fall ist, übertragen werden sollen, kann sie die Sprachkurve total verzerren. Denken wir uns eine solche Kurve, in welcher Maxima und Minima in komplizierter Weise abwechseln, so geht die Verzerrung in dem Sinne vor sich, daß das $W_1 - W$ des zweiten Paragraphen im allgemeinen von Maximum zu Minimum kleiner wird, und umgekehrt, so

daß eine schier unübersehbare Veränderung der Kurve auf dem Wege von der Mikrophon- zur Telephonmembran resultieren muß. Man könnte versucht sein, zu fragen, wie dann überhaupt noch eine Verständigung möglich ist; hierzu ist folgendes zu bemerken: Bei der Sprachübertragung liegen die Verhältnisse insofern günstig, als die einzelnen Partialtöne der Sprachklänge ziemlich stark verschiedene Amplituden haben, so daß innerhalb eines Lautes die Minima nicht allzu ausgeprägt sind; es werden dann die Störungen weniger in einer Verzerrung der einzelnen Laute als in dem Hinzufügen von neuen Klängen oder schon mehr Geräuschen bestehen. Ich denke, daß hiermit auch die Tatsache im Zusammenhang steht, daß in einem gut funktionierenden Mikrophon-Telephonkreis leise Sprache reiner und deutlicher übertragen wird als laute. Beim lauten Sprechen ist der Einfluß von $W_1 - W$, wie aus § 2 zu ersehen — wohl auch relativ — größer als beim leisen Sprechen. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß wir beim Hören sehr viel erraten, was man ja sehr deutlich merkt, wenn man sich am Telephon in einer fremden Sprache unterhält. Die „Übertragung“ ist dann gleich sehr viel schlechter.

In bezug auf die Prüfung der Güte der Sprachübertragung im Mikrophon-Telephonkreis ergibt sich aus dem Gesagten folgendes: Man beginne nicht damit, die komplizierten Vokalkurven aufzunehmen, um aus ihnen die Güte der Übertragung zu erschließen, sondern nehme einfache, typische Schwebungskurven auf. Die geringste Verzerrung derselben ist mit voller Sicherheit zu erkennen. Ich zweifle nicht daran, daß ein Sprechkreis, der Schwebungskurven unverzerrt überträgt, eine ausgezeichnete Verständigung gibt; dabei soll noch die Möglichkeit einer geringen Verzerrung durch Eigentöne der Membranen nicht ausgeschlossen sein. Übrigens würde an der Art der Verzerrung ohne weiteres zu sehen sein, ob sie auf Eigentöne oder auf die besprochenen Eigenschaften des Mikrophons zurückzuführen ist. Über den Inhalt dieses Paragraphen soll an anderer Stelle ausführlicher berichtet werden.

Schluß.

Jedem, der mit den KT. vertraut ist, wird es aufgefallen sein, daß das Verhalten der im Mikrophon-Telephonkreis ent-

stehenden KT. in den meisten Punkten das gleiche ist, wie das der sogenannten subjektiven KT., die im Ohre des Beobachters entstehen. Hierdurch erklärt sich ja auch, daß man bisher in den KT. im Mikrophon-Telephonkreis allgemein eine Bestätigung der Helmholtzschen Theorie der KT. gesehen hat. Es ist nicht wahrscheinlich, daß diese Übereinstimmung eine rein zufällige ist, und deshalb lag es nahe, unsere Ansichten über die Entstehungsweise der KT. auch in allen anderen Fällen nochmals nachzuprüfen. Über die Resultate der entsprechenden Überlegungen werde ich demnächst berichten.

Breslau, Physikalisches Institut, Juli 1913.

(Eingegangen 27. Juli 1913.)

3. *Über die Abzählung der Eigenschwingungen fester Körper;* *von Rudolf Ortway.*

1. Einleitung und Allgemeines.

In der Quantentheorie der spezifischen Wärme der festen Körper, wie sie von P. Debye¹⁾ entwickelt wurde, ist die Bestimmung des akustischen Spektrums der festen Körper erforderlich. Debye hat das akustische Spektrum der isotropen Körper bestimmt, indem er von den Eigenschwingungen einer Kugel bei kräftefreier Oberfläche ausgeht. Da für die spezifische Wärme nur sehr hohe Frequenzen maßgebend sind, deren Verteilung von der Form des Körpers unabhängig²⁾ ist, kann er seine Resultate auf alle isotropen Körper ausdehnen.

Weil aber die Durchführung der Rechnung bei der Kugel weitgehende mathematische Hilfsmittel, wie Entwicklungen nach Kugelfunktionen erfordert, erscheint es wünschenswert, einen einfacheren Weg anzugeben, der zu der Verteilung der Eigenfunktionen führt.

Hr. Prof. Sommerfeld hat in einer Vorlesung über Quantentheorie im Wintersemester 1912/13 einen solchen Weg angegeben, indem er das elastische Problem eines isotropen Würfels löst bei „gemischten Grenzbedingungen“³⁾, nach

1) P. Debye, Ann. d. Phys. **39**. p. 789—839. 1912.

2) P. Debye, l. c.; H. Weyl, Math. Ann. **71**. p. 441—479. 1911.

3) „Gemischte Grenzbedingungen“ wurden benutzt von C. Somigliana, Roma Acc. Linc. Red. (5) **11**. I. 1912; (5) **13**. I. 1904; (5) **13**. II. 1904. Ferner löst L. Orlando (Sopra alcuni problemi di fisica matematica, Messina 1905) das Problem des elastischen Gleichgewichtes des Parallelepipeds, indem er die Greensche Funktion angibt. Siehe weiter A. Molinari, Sopra alcuni diversi casi d'integrazione della $\Delta^2 = 0$ nell'parallelepipedo rettangolo, Giornali di matematici Battaglini, Roma 1913. Vgl. auch Enzykl. der math. Wiss., **4**. 2. II. Heft 2. p. 183.

welchen die normalen Verrückungen und tangentiellen Spannungen verschwinden. Eine solche bequeme Abänderung der Grenzbedingungen ist erlaubt; denn wir sind ebensowenig an bestimmte Grenzbedingungen¹⁾ wie an bestimmte Körperform gebunden, nur müssen die Grenzbedingungen derart sein, daß kein Energiestrom durch die Oberfläche fließt, d. h. wir setzen einen Körper im Wärmegleichgewicht mit der Umgebung voraus.

Diese Grenzbedingungen gestatten nicht nur eine Lösung des elastischen Problems des isotropen Würfels in trigonometrischen Funktionen, sondern auch die eines rhombisch kristallinischen. Dadurch wird es ermöglicht, die Debyesche Theorie der spezifischen Wärme auf rhombische Kristalle auszudehnen.

Das elastische Problem des Würfels bei „ungemischten Grenzbedingungen“, d. h. bei festgehaltener oder freier Oberfläche ist bis jetzt nicht gelöst und auch nicht in elementaren Funktionen lösbar, wie von den Untersuchungen über das einfachere Problem der Platten her bekannt ist. Man könnte die von Sommerfeld benutzten Grenzbedingungen dadurch realisiert denken, daß man den elastischen Würfel durch eine fest anschließende, starre Würfelform begrenzt denkt, so aber, daß zwischen den beiden Flächen keine Reibung stattfindet. Wir wollen diesen Fall im folgenden kurz als Fall I bezeichnen.

In Anlehnung hieran habe ich gefunden, daß das elastische Problem auch lösbar wird, wenn man umgekehrt an der Oberfläche die normalen Spannungen und die tangentiellen Verrückungen verschwinden läßt (Fall II).

Physikalisch sind diese Grenzbedingungen noch schwieriger realisiert zu denken als im Falle I, sie würden eine Führung in der Flächennormale jedes Flächenelementes erfordern, durch welche die benachbarten Flächenelemente nicht beeinflusst werden. Da aber eine solche Grenzbedingung an sich widerspruchsfrei ist, werden die Folgerungen daraus ebenso gültig sein, wie jene, die aus ebenfalls unausführbaren thermodynamischen Gedankenexperimenten abgeleitet werden.

Bedeutet \mathfrak{B} die Verrückung mit den Komponenten ξ, η, ζ , t die Zeit, ρ die Dichte, λ, μ die elastischen Konstanten und

¹⁾ P. Debye, l. c.

ist $\Theta = \text{div } \mathfrak{B}$, so lauten die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu \Delta \xi + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \Delta \eta + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \Delta \zeta + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \end{cases}$$

Für die Oberfläche fordern wir, um einen Körper im Wärme-
gleichgewicht mit der Umgebung zu haben, daß bei der Be-
wegung keine Arbeit geleistet wird.

Die an der Oberfläche geleistete Arbeit ist:

$$\iint (X_n \xi + Y_n \eta + Z_n \zeta) dS,$$

wo

$$(2) \quad \begin{cases} X_n = X_x \cos (nx) + X_y \cos (ny) + X_z \cos (nz) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

die Komponenten der Kräfte auf die Flächeneinheit mit der
Normale n bedeuten und wo die Komponenten der inneren
Spannung gegeben sind durch:

$$(3) \quad \begin{cases} X_x = \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \dots \dots \dots \\ Y_z = \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

In unserem Falle I oder II verschwindet die Arbeit, da
entweder die Kräfte in der Richtung der Verrückung oder die
Verrückung in der Richtung der Kräfte verschwindet.

2. Lösung des elastischen Problems bei gemischten Grenzbedingungen.

Fall I.

Wir gehen nun zur Behandlung unseres speziellen Pro-
blems über. Es sei ein Würfel von der Kantenlänge l ge-
geben. Den Anfangspunkt unseres Koordinatensystems legen
wir in den einen Eckpunkt, die Koordinatenachsen in die an-
grenzenden Kanten des Würfels.

Die Grenzbedingungen fordern, daß die normalen Verrückungen und tangentiellen Spannungen verschwinden.

Für die Flächen $x = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases}$ ergibt diese Bedingung:

$$(4) \quad \xi = 0, \quad Y_x = Z_x = 0.$$

Da aber

$$Y_x = \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)$$

$$Z_x = \mu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)$$

und $\xi = 0$ an der ganzen Fläche ist, so erhalten wir

$$(5') \quad \xi = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Analog lauten die Grenzbedingungen an den übrigen Flächen:

$$(5'') \quad y = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} \quad \eta = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

$$(5''') \quad z = \begin{cases} 0 \\ l \end{cases} \quad \zeta = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0.$$

Um diese Grenzbedingungen zu erfüllen, setzen wir für die Verrückungen, indem wir uns auf zeitlich periodische Vorgänge beschränken:

$$(6) \quad \begin{cases} \xi = A \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} e^{i \omega t}, \\ \eta = B \cos \frac{a \pi x}{l} \sin \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} e^{i \omega t}, \\ \zeta = C \cos \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \sin \frac{c \pi z}{l} e^{i \omega t}, \end{cases}$$

wo A, B, C komplexe Konstante sind. Die Grenzbedingungen sind erfüllt, wie man sich durch Einsetzen von ξ, η, ζ aus (6) in die Gleichungen (5'), (5''), (5''') überzeugen kann. Wesentlich dabei ist für die Form der angesetzten Lösung, daß sie aus dem Produkte zweier Cosinus mit einem Sinus bestehen und im Argumente des Sinus der Reihe nach x, y, z vorkommt.

Um die Frequenzen ω zu bestimmen, setzen wir ξ, η, ζ aus (6) in die Grundgleichungen (1) ein und erhalten, wenn wir nach A, B, C ordnen:

$$(7) \quad \begin{cases} A(F_1 - \rho \omega^2) + B H_1 & + C H_2 & = 0, \\ A H_1 & + B(F_2 - \rho \omega^2) + C H_3 & = 0, \\ A H_2 & + B H_3 & + C(F_3 - \rho \omega^2) = 0, \end{cases}$$

wo die F_1 bis H_3 bedeuten:

$$F_1 = [(\lambda + \mu) a^3 + \mu (a^3 + b^3 + c^3)] \frac{\pi^2}{l^2},$$

$$F_2 = [(\lambda + \mu) b^3 + \mu (a^3 + b^3 + c^3)] \frac{\pi^2}{l^2},$$

$$F_3 = [(\lambda + \mu) c^3 + \mu (a^3 + b^3 + c^3)] \frac{\pi^2}{l^2},$$

$$H_1 = (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{l^2} a b,$$

$$H_2 = (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{l^2} a c,$$

$$H_3 = (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{l^2} b c.$$

Die drei linearen homogenen Gleichungen (7) haben nur dann ein von Null verschiedenes Lösungssystem, wenn die Determinante verschwindet:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} F_1 - \varrho \omega^2 & H_1 & H_2 \\ H_1 & F_2 - \varrho \omega^2 & H_3 \\ H_2 & H_3 & F_3 - \varrho \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ergibt ausgerechnet:

$$(9) \quad \left(\mu \frac{\pi^2}{l^2} (a^3 + b^3 + c^3) - \varrho \omega^2 \right)^2 \left((\lambda + 2\mu) \frac{\pi^2}{l^2} (a^3 + b^3 + c^3) - \varrho \omega^2 \right) = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades für ω^2 hat drei Wurzeln, von denen zwei gleich sind; für ω selbst hat man:

$$(10) \quad \omega_1 = \omega_2 = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varrho} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{l}}.$$

$$(11) \quad \omega_3 = \pi \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{l}}.$$

Mit den aus der Elastizitätstheorie bekannten Werten der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für longitudinale bzw. transversale Wellen:

$$(12) \quad c_{\text{long}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}$$

$$(13) \quad c_{\text{trans}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

erhalten wir aus den Formeln (10) und (11):

$$(14) \quad \omega_1 = \omega_2 = c_{\text{trans}} \frac{\pi}{l} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$(15) \quad \omega_3 = c_{\text{long}} \frac{\pi}{l} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Führen wir anstatt der Frequenzen ω_1 die Schwingungszahlen $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ oder die Wellenlängen λ ein, so erhalten wir:

$$(16) \quad \nu_1 = \nu_2 = c_{\text{trans}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2l},$$

$$(17) \quad \nu_3 = c_{\text{long}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2l},$$

oder

$$(18) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{c_{\text{trans}}}{\nu_1} = \frac{2l}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$(19) \quad \lambda_3 = \frac{c_{\text{long}}}{\nu_3} = \frac{2l}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Die Anzahl der Eigenschwingungen mit Wellenlängen oberhalb λ bzw. mit Schwingungszahlen unterhalb ν können wir sofort angeben, wenn wir nach der von Lord Rayleigh und J. H. Jeans zuerst angewandten Methode¹⁾ die Anzahl der Gitterpunkte in einem gewissen Kugeloktanten abzählen.

Wir erhalten so die Anzahl der freien Eigenschwingungen, für welche $\nu_1 < \nu$ bzw. $\nu_2 < \nu$ ist:

$$(20) \quad \mathfrak{N}_\nu^{(1)} = \mathfrak{N}_\nu^{(2)} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2l}{c_{\text{trans}}} \cdot \nu \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot V \left(\frac{\nu}{c_{\text{trans}}} \right)^3,$$

wo $V = l^3$ für das Volum des Kastens gesetzt ist.

Ebenso ist die Anzahl der Eigenschwingungen, für welche

$$(21) \quad \nu_3 < \nu, \quad \mathfrak{N}_\nu^{(3)} = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{\nu}{c_{\text{long}}} \right)^3.$$

Für die Gesamtzahl der freien Eigenschwingungen ergibt sich nunmehr:

$$(22) \quad \mathfrak{N}_\nu = \mathfrak{N}_\nu^{(1)} + \mathfrak{N}_\nu^{(2)} + \mathfrak{N}_\nu^{(3)} = \frac{4\pi}{3} V \nu^3 \left(\frac{1}{c_{\text{long}}^3} + \frac{2}{c_{\text{trans}}^3} \right)$$

oder wenn wir c_{long} und c_{trans} wieder mit Hilfe von $\rho \lambda \mu$ ausdrücken:

$$(23) \quad \mathfrak{N}_\nu = \frac{4\pi}{3} V \nu^3 \left[\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{3/2} + 2 \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{3/2} \right].$$

Wenn wir an Stelle der Frequenz die Wellenlänge einführen, erhalten wir für die Formel (22) den Ausdruck:

1) Lord Rayleigh, Nature 72. p. 54 u. 243. 1905. J. H. Jeans, Phil. Mag. 10. p. 91. 1905.

$$(24) \quad \mathfrak{N}_v = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{1}{\lambda_{\text{long}}^3} + \frac{2}{\lambda_{\text{trans}}^3} \right).$$

Die Gleichung (22) oder (23) können wir dazu benutzen, um die obere Grenze der Schwingungszahlen ν_{max} zu bestimmen. Da die Anzahl der Freiheitsgrade im Volum V gleich $3N$ ist, wenn N die Anzahl der Atome daselbst bedeutet, erhalten wir die Gleichung:

$$(25) \quad 3N = \frac{4\pi}{3} V \cdot \nu_{\text{max}}^3 \left(\frac{1}{c_{\text{long}}^3} + \frac{2}{c_{\text{trans}}^3} \right)$$

zur Bestimmung von ν_{max} .

Wenn wir erwägen, daß unser elastischer Körper in Wirklichkeit aus einem molekularen Raumgitter besteht, liegt es vielleicht näher, nicht eine obere Grenze für die Schwingungszahl, sondern eine untere für die Wellenlänge anzunehmen, da wohl die möglichen kürzesten Wellenlängen durch den Molekularabstand bedingt werden. Begrenzen wir die Wellenlängen durch eine feste Wellenlänge λ_{min} , so erhalten wir beim regulären Gitter zu ihrer Bestimmung aus (24) die Gleichung:

$$(26) \quad 3N = \frac{4\pi}{3} V \cdot \frac{3}{\lambda_{\text{min}}^3},$$

$$(27) \quad \lambda_{\text{min}} = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} \left(\frac{V}{N} \right)^{1/3}.$$

Bedeutet a den kleinsten Molekularabstand im kubischen Raumgitter, so können wir Formel (27) mit Benutzung der Bedingung $Na^3 = V$ auch so schreiben:

$$(28) \quad \lambda_{\text{min}} = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} a.$$

Bei dieser Begrenzung des akustischen Spektrums durch eine feste Wellenlänge wird dasselbe in Schwingungszahlen ausgedrückt, aus zwei Banden bestehen, deren Enden durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$(29) \quad \nu_{1\text{max}} = \frac{c_{\text{trans}}}{\lambda_{\text{min}}}, \quad \nu_{2\text{max}} = \frac{c_{\text{long}}}{\lambda_{\text{min}}}.$$

Ob sich auf diese Weise ebenso brauchbare Formeln für die spezifische Wärme ergeben wie auf dem von Debye beschriebenen Wege, bleibe hier dahingestellt.

Fall II.

Für diesen Fall, wo normale Spannungen und tangentielle Verrückungen verschwinden, sind die Grenzbedingungen:

$$(30) \quad x = \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} : X_x = \eta = \zeta = 0.$$

Da aber

$$X_x = \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

ist, und an der ganzen Fläche $\eta = \zeta = 0$ folgt:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0,$$

so daß wir folgende Grenzbedingungen erhalten:

$$(31) \quad \begin{cases} x = \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} : \frac{\partial \xi}{\partial x} = \eta = \zeta = 0, \\ y = \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} : \xi = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \zeta = 0, \\ z = \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} : \xi = \eta = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Für die Verrückungen setzen wir:

$$(32) \quad \begin{cases} \xi = A \cos \frac{a\pi x}{l} \sin \frac{b\pi y}{l} \sin \frac{c\pi z}{l} e^{i\omega t}, \\ \eta = B \sin \frac{a\pi x}{l} \cos \frac{b\pi y}{l} \sin \frac{c\pi z}{l} e^{i\omega t}, \\ \zeta = C \sin \frac{a\pi x}{l} \sin \frac{b\pi y}{l} \cos \frac{c\pi z}{l} e^{i\omega t}. \end{cases}$$

Wie ersichtlich unterscheidet sich dieser Fall von dem vorhergehenden nur dadurch, daß die Sinus und Cosinus vertauscht sind. Wir überzeugen uns wieder leicht, daß die Grenzbedingungen (31) erfüllt sind, und wenn wir die Werte der Verrückung aus (32) in die Grundgleichungen (1) einsetzen, erhalten wir ebenso wie früher die Frequenzgleichung (8) und schließlich denselben Ausdruck für die Anzahl der Eigenschwingungen.

3. Darstellung des allgemeinen Bewegungszustandes bei willkürlichem Anfangszustand.

Wir wollen noch zeigen, daß wir mit Hilfe unserer Partikularlösungen jeden Bewegungszustand unseres Würfels, der mit den Grenzbedingungen verträglich ist, darstellen können. Dadurch zeigen wir auch gleichzeitig, daß die Reihe unserer Partikularlösungen sämtliche Eigenschwingungen enthält. Wir

beschränken uns bei dieser Betrachtung auf den Fall I, da sie bei dem Falle II ganz ähnlich verläuft.

Wir schreiben für $t = 0$ die Verrückungen und deren zeitliche Differentialquotienten willkürlich vor, nur mit der Beschränkung, daß die Grenzbedingungen (5') (5'') (5''') erfüllt sein sollen und wollen die betreffenden willkürlichen Funktionen nach Fourier entwickelt denken:

$$(33) \left\{ \begin{aligned} \xi &= \varphi_1(x, y, z) = \sum_0^{\infty} (a b c) L_{abc} \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} \\ \eta &= \varphi_2(x, y, z) = \sum_0^{\infty} (a b c) M_{abc} \cos \frac{a \pi x}{l} \sin \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} \\ \zeta &= \varphi_3(x, y, z) = \sum_0^{\infty} (a b c) N_{abc} \cos \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \sin \frac{c \pi z}{l} \\ \dot{\xi} &= \psi_1(x, y, z) = \sum_0^{\infty} (a b c) P_{abc} \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} \\ \dot{\eta} &= \psi_2(x, y, z) = \sum_0^{\infty} (a b c) Q_{abc} \cos \frac{a \pi x}{l} \sin \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} \\ \dot{\zeta} &= \psi_3(x, y, z) = \sum_0^{\infty} (a b c) R_{abc} \cos \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \sin \frac{c \pi z}{l} \end{aligned} \right.$$

wo die Koeffizienten gegeben sind durch

$$(34) \left\{ \begin{aligned} L_{abc} &= \frac{8}{l^3} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \varphi_1(x, y, z) \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} dx dy dz \end{aligned} \right.$$

Die Wahl der Funktionen, die das Produkt zweier Cosinus mit einem Sinus enthalten, beruht auf der Möglichkeit, dadurch die Grenzbedingungen zu erfüllen.

Vergleichen wir damit die allgemeinste Funktion, die wir für die Verrückungskomponenten durch Summation unserer Partikularlösungen erhalten können. Es ergeben sich ähnlich gebaute Reihen für beliebiges t

$$(35) \left\{ \begin{aligned} \xi &= \sum_0^{\infty} (a b c) A_{abc} \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} e^{i \omega t} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

und durch Differentiation nach t :

$$(36) \left\{ \begin{aligned} u_r &= \sum_0^{\infty} (a b c) i \omega A_{abc} \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} e^{i \omega t} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

wo allein der reelle Teil der komplexen Ausdrücke in Betracht kommt. Gehen wir zur reellen Schreibweise über, indem wir die komplexen Konstanten und die Zeitfunktion in reellen und imaginären Teil zerlegen:

$$(37) \left\{ \begin{aligned} A_{abc} &= A'_{abc} + i A''_{abc} \\ B_{abc} &= B'_{abc} + i B''_{abc} \\ C_{abc} &= C'_{abc} + i C''_{abc} \\ e^{i \omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \end{aligned} \right.$$

so erhalten wir die reellen Teile für $t = 0$ zu:

$$(38) \left\{ \begin{aligned} u_r &= \sum_0^{\infty} (a b c) A'_{abc} \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} \\ &\dots \dots \dots \\ u_r &= \sum_0^{\infty} (a b c) (-\omega A''_{abc}) \sin \frac{a \pi x}{l} \cos \frac{b \pi y}{l} \cos \frac{c \pi z}{l} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Wollen wir durch diesen Ausdruck einen beliebigen Anfangszustand darstellen, so müssen die entsprechenden Koeffizienten der Gleichungen (38) und (33) gleich sein:

$$(39) \left\{ \begin{aligned} L_{abc} &= A'_{abc} & P_{abc} &= -\omega A''_{abc} \\ M_{abc} &= B'_{abc} & Q_{abc} &= -\omega B''_{abc} \\ N_{abc} &= C'_{abc} & R_{abc} &= -\omega C''_{abc} \end{aligned} \right.$$

Wenn $A'_{abc} \dots C'_{abc}$ unabhängige Konstanten sind, können wir sie immer so wählen, daß die Gleichungen (39) bei beliebigen L, M, N erfüllt sind.

Um die Unabhängigkeit der Konstanten einzusehen, bedarf es einer gesonderten Betrachtung. Die Konstanten ABC müssen ja der Gleichung (7) genügen, wodurch ihre Unabhängigkeit beschränkt sein könnte.

Da $F_1 \dots H_3$ alle reell sind, gelten die Gleichungen (7) gesondert für die reellen und imaginären Teile der Konstanten, die sich gesondert auf ganz gleiche Weise behandeln lassen. Die Determinante (8), welche verschwinden mußte, damit das Gleichungssystem (7) eine Lösung hatte, ist für den reellen und imaginären Teil identisch.

Da (8) eine Gleichung dritten Grades für ω^2 ist, hat sie drei Wurzeln:

$$(40) \quad \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2.$$

Sind die Wurzeln alle voneinander verschieden, so erhalten wir je drei linear unabhängige Lösungssysteme für den reellen und imaginären Teil der Konstanten, die bis auf einen willkürlichen Faktor $k_1' k_2' k_3'$ resp. $k_1'' k_2'' k_3''$ bestimmt sind. Für den reellen Teil erhalten wir:

$$(41) \quad \omega_1^2: \begin{Bmatrix} k_1' & A_1' \\ k_1' & B_1' \\ k_1' & C_1' \end{Bmatrix}, \quad \omega_2^2: \begin{Bmatrix} k_2' & A_2' \\ k_2' & B_2' \\ k_2' & C_2' \end{Bmatrix}, \quad \omega_3^2: \begin{Bmatrix} k_3' & A_3' \\ k_3' & B_3' \\ k_3' & C_3' \end{Bmatrix}$$

und entsprechend für den imaginären Teil:

$$(42) \quad \omega_1^2: \begin{Bmatrix} k_1'' & A_1'' \\ k_1'' & B_1'' \\ k_1'' & C_1'' \end{Bmatrix}, \quad \omega_2^2: \begin{Bmatrix} k_2'' & A_2'' \\ k_2'' & B_2'' \\ k_2'' & C_2'' \end{Bmatrix}, \quad \omega_3^2: \begin{Bmatrix} k_3'' & A_3'' \\ k_3'' & B_3'' \\ k_3'' & C_3'' \end{Bmatrix}.$$

Setzen wir:

$$(43) \quad \begin{cases} L = k_1' A_1' + k_2' A_2' + k_3' A_3' \\ M = k_1' B_1' + k_2' B_2' + k_3' B_3' \\ N = k_1' C_1' + k_2' C_2' + k_3' C_3' \end{cases}$$

und entsprechend:

$$(44) \quad \begin{cases} -\frac{1}{\omega} P = k_1'' A_1'' + k_2'' A_2'' + k_3'' A_3'' \\ -\frac{1}{\omega} Q = k_1'' B_1'' + k_2'' B_2'' + k_3'' B_3'' \\ -\frac{1}{\omega} R = k_1'' C_1'' + k_2'' C_2'' + k_3'' C_3'' \end{cases}$$

Sind die einzelnen Lösungen (41) und (42) linear unabhängig, so können wir $k_1' k_2' k_3'$ resp. $k_1'' k_2'' k_3''$ immer so wählen, daß wir die Gleichungen (43) resp. (44) befriedigen können. In diesem Falle ist die Bedingung der Lösbarkeit von (43) und (44), das Nichtverschwinden der Determinante

$$(45) \quad \begin{vmatrix} A_1' & A_2' & A_3' \\ B_1' & B_2' & B_3' \\ C_1' & C_2' & C_3' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ resp. } \begin{vmatrix} A_1'' & A_2'' & A_3'' \\ B_1'' & B_2'' & B_3'' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

erfüllt.

Jedoch besitzt in unserem Falle (bei isotropen Körper) die Gleichung (8) zwei gleiche Wurzeln (Gleichung 10)

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = \pi^2 \frac{\mu}{\rho} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{l^2}.$$

In diesem Falle sind nach einem Satze der Algebra die drei unabhängigen Lösungssysteme nur vorhanden, wenn im Falle der Doppelwurzel auch die Unterdeterminanten zweiter Ordnung verschwinden. Das ist in der Tat der Fall. Setzen wir den obigen Wert von ω_1^2 in die Determinante ein, so erhalten wir nach der Einsetzung von $F_1 \dots H_3$

$$(46) \quad \left\{ \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (\lambda + \mu)^3 \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix} = 0. \right.$$

Die Subdeterminanten

$$(47) \quad \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ba & b^2 \end{vmatrix} = 0 \dots \begin{vmatrix} b^2 & bc \\ cb & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

verschwinden alle, und so erhalten wir auch in diesem Falle drei linear unabhängige Lösungssysteme.

4. Abzählung der Eigenschwingungen eines rhombisch-kristallinischen Würfels.

Der Ansatz (6) für die Verrückungen bei den Grenzbedingungen (4) läßt sich ohne Änderung auf rhombische Kristalle anwenden, und damit eine Theorie der spezifischen Wärme rhomischer Kristalle auf Grundlage der Debyeschen Theorie aufbauen.

Born und v. Kármán¹⁾ haben, indem sie auf die Schwingungen des molekularen Raumgitters zurückgehen, eine Abzählung der Eigenschwingungen auch für den allgemeinsten Fall trikliner Kristalle gegeben.

Obwohl die Methode von Born und v. Kármán die tiefergehende ist, wird die mehr phänomenologische Methode von Debye ihren Wert solange unzweifelhaft behalten, als unsere Kenntnisse der molekularen Raumgitter so ungewiß sind.

Um die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie zu erhalten, führen wir das elastische Potential W ein, dessen Ausdruck durch die Deformationsgrößen gegeben wird, als

1) M. Born u. v. Kármán, Phys. Zeitschr. 13. p. 297. 1912; 14. p. 15 u. 65. 1913.

$$(51) \quad Y_z = c_{44} y_z, \quad Z_x = c_{55} z_x, \quad X_y = c_{66} x_y.$$

Wir fordern hiernach das Verschwinden von:

$$(52) \quad \begin{cases} c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & c_{45} & c_{46} \\ & & c_{56} \end{cases}$$

Diese Bedingung ist erfüllt beim rhombischen, tetragonalen, hexagonalen und kubischen System, wenn wir als Koordinatenachsen Symmetriachsen wählen.

Die Spannungskomponenten erhalten wir zu:

$$(53) \quad \begin{cases} X_x = c_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ Y_y = c_{21} \frac{\partial \xi}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ Z_z = c_{31} \frac{\partial \xi}{\partial x} + c_{32} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c_{33} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{cases}$$

$$(54) \quad \begin{cases} Y_z = c_{44} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ Z_x = c_{55} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ X_y = c_{66} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{cases}$$

Den Würfel orientieren wir so, daß die Kanten in die Koordinatenachsen fallen, die der Kristallstruktur entsprechend gewählt sind. Indessen bedeutet diese spezielle Orientierung für die in Frage kommenden hohen Frequenzen keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit.

Für die Verrückungskomponenten setzen wir wieder die Ausdrücke (6), welche den Grenzbedingungen (5') (5'') (5''') auch jetzt genügen.

Nach Einsetzung derselben in die Grundgleichungen (50) erhalten wir:

$$(55) \quad \begin{cases} A(c_{11} a^2 + c_{66} b^2 + c_{55} c^2 - \rho \omega^2) + B(c_{12} + c_{66}) a b \\ \quad + C(c_{13} + c_{55}) a c = 0, \\ A(c_{21} + c_{66}) b a + B(c_{66} a^2 + c_{23} b^2 + c_{44} c^2 - \rho \omega^2) \\ \quad + C(c_{23} + c_{44}) b c = 0, \\ A(c_{31} + c_{55}) c a + B(c_{32} + c_{44}) c b \\ \quad + C(c_{55} a^2 + c_{44} b^2 + c_{33} c^2 - \rho \omega^2) = 0, \end{cases}$$

nachdem wir den gemeinsamen Zeitfaktor und die trigonometrischen Ortsfunktionen weggelassen haben.

Die Bedingung, daß das Gleichungssystem (55) nach A, B, C auflösbar ist, besteht in dem Verschwinden der Determinante:

$$(56) \begin{vmatrix} c_{11}a^2 + c_{66}b^2 + c_{55}c^2 - \rho\omega^2, & (c_{12} + c_{66})ab, & (c_{13} + c_{55})ac \\ (c_{21} + c_{66})ba, & c_{66}a^2 + c_{22}b^2 + c_{44}c^2 - \rho\omega^2, & (c_{23} + c_{44})bc \\ (c_{31} + c_{55})ca, & (c_{32} + c_{44})cb, & c_{55}a^2 + c_{44}b^2 + c_{33}c^2 - \rho\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Deuten wir a, b, c als rechtwinkelige Koordinaten, so repräsentiert unsere Gleichung eine Fläche sechsten Grades. Die Anzahl der Eigenschwingungen, deren Frequenz kleiner als ω ist, ergibt eine Abzählung der den ganzzahligen a, b, c entsprechenden Gitterpunkte in dem durch die positiven Koordinatenebenen einerseits und die Fläche andererseits eingeschlossenen Raum. Da diese Aufgabe außer dem schon früher behandelten Spezialfalle der Isotropie, wo die Fläche aus drei Kugelschalen besteht, auf große Schwierigkeiten stößt, möge sie hier nicht weiter behandelt werden.

Wir können aber aus der Form der Gleichung (56) den Satz von Debye für die obengenannten Kristalle beweisen, nämlich daß die Anzahl der Eigenschwingungen proportional der dritten Potenz der Frequenz ω oder der Schwingungszahl ν ist:

$$(57) \quad \mathfrak{N}_\nu = K \nu^3.$$

Die Gleichung (56) wird nämlich wegen ihrer Homogenität auch durch die Werte $na, nb, nc, n\omega$ befriedigt, wenn sie durch a, b, c, ω befriedigt wird; d. h. die Flächen für verschiedene Werte von ω bleiben geometrisch ähnlich.

Ist das Volum, d. h. die Anzahl der Eigenschwingungen, für $\omega = 2\pi$, d. h. $\nu = 1$, bekannt

$$\mathfrak{N}_{\nu=1} = K,$$

so wird sie für ein beliebiges ν durch (57) gegeben.

Es scheint mir nicht zweifelhaft, daß man dieselbe Beziehung (57) auf ähnliche Weise auch für triklone Kristalle beweisen können müßte. Es ist mir indessen nur gelungen, die von Born und v. Kármán gegebene Formel: $d\mathfrak{N}$ proportional zu $1/\lambda^3 \cdot d(1/\lambda)$ auf dem dort angedeuteten Wege

über das reguläre System¹⁾ hinaus zu verallgemeinern und daraus für den langwelligen Teil des Spektrums die Gleichung (57) abzuleiten. Ich führe dies hier nicht aus, weil es nach den vorliegenden Beobachtungen scheint, daß außerhalb des regulären Systems die Nernst-Lindemannsche Formel (und daher auch die neueren von Debye und von Born-v. Kármán) nicht mehr brauchbar sind. Auf Grund der Formel (57) würden wir aber auch im triklinen Fall genau zu der Formel von Debye kommen, nur daß die Berechnung der Grenzschwingungszahl ν_{\max} aus den elastischen Konstanten entsprechend verwickelt wird. Alles unter der Voraussetzung einatomiger Kristalle. Ob die Abweichungen bei Verbindungen durch die Annahme von Gittern, wo nicht alle Gitterpunkte mit gleichen Massen belegt sind, erklärt werden können, soll hier nicht untersucht werden.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Es wird eine einfache Methode zur Bestimmung des akustischen Spektrums isotroper Körper gegeben bei Zugrundelegung sog. gemischter Grenzbedingungen.

2. Durch Anwendung derselben Methode wird die Formel von Debye, nach welcher die Anzahl der Eigenschwingungen mit der dritten Potenz der Frequenz zunimmt, auf Kristalle bis zum rhombischen System einschl. ausgedehnt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. A. Sommerfeld für die Anregung zur Mitteilung seiner Ergebnisse bei isotropen Körpern und für sein förderndes Interesse bei deren Verallgemeinerung auf anisotrope Körper meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

München, Institut für theoretische Physik, August 1913.

1) M. Born u. v. Kármán, Phys. Zeitschr. 14. p. 15—19. 1913.

(Eingegangen 2. August 1913.)

**4. Experimentelle Bestimmung der spezifischen Wärme zweiatomiger Gase nebst anschließenden theoretischen Schlußfolgerungen;
von Wilhelm Escher.**

(Auszug aus der Marburger Inauguraldissertation vom 1. Dezember 1911 und aus den weiterführenden Mitteilungen von F. Richarz und dem Verf. in den Marburger Sitzungsber. vom 13. November 1912, samt einigen Zusätzen.)

(Hierzu Tafel XII.)

An dieser Stelle ist vor kurzem von den Herren Karl Scheel und Wilhelm Heuse¹⁾ berichtet worden über eine Neubestimmung der spezifischen Wärme einiger zweiatomiger Gase. Die Untersuchung ist von ihnen für das Temperaturintervall von -180° bis $+20^{\circ}$ C. ausgeführt worden unter Benutzung von H. L. Callendar's continuous-flow method of calorimetry²⁾, welche zuerst W. F. G. Swann³⁾ zur c_p -Bestimmung von Gasen mit Erfolg angewandt hat. Von den vorliegenden früheren Bestimmungen der spezifischen Wärme der Gase bei konstantem Druck erwähnen Scheel und Heuse in ihren beiden Mitteilungen nur die Resultate M. V. Regnaults⁴⁾ und ganz kurz diejenigen von E. Wiedemann.⁵⁾ Beide Forscher haben ihre Bestimmungen nach der Mischungsmethode ausgeführt, bei der eine ihrer Masse nach bekannte Gasmenge auf eine bestimmte Temperatur erhitzt und dann durch ein Kalorimeter geleitet wird, in welchem das Gas die auf-

1) K. Scheel und W. Heuse, Ann. d. Phys. 37. p. 79 ff. 1912; 40. p. 473 ff. 1913.

2) H. L. Callendar, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 199 (A). p. 55 ff. 1902.

3) W. F. G. Swann, Proceedings of the Royal Society of London 82 (A). p. 147. 1909; Philosophical Transactions of the Royal Society of London 210 (A). p. 199 ff. 1911.

4) M. V. Regnault, Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France 26. Paris 1862.

5) E. Wiedemann, Pogg. Ann. 157. p. 1 ff. 1876.

genommene Wärme an eine ihrem Gewicht nach bekannte Wassermasse wieder abgeben muß. Scheel und Heuse weisen darauf hin, daß bei den Bestimmungen nach der Mischungsmethode gewisse Korrekturen, vor allem an der beobachteten Temperaturerhöhung des Kalorimeterwassers, erforderlich sind, welche Regnault bei der Auswertung seiner Versuche anzubringen unterlassen hat. Sie folgern aus dieser Tatsache, daß den Regnaultschen c_p -Werten nicht der Grad von Genauigkeit zuzumessen ist, der ihnen heute vielfach beigelegt wird. Scheel und Heuse haben jedoch übersehen, daß in den letzten Jahren für die bekanntesten zweiatomigen Gase Neubestimmungen der spezifischen Wärme bei konstantem Druck nach der Mischungsmethode im Physikalischen Institut der Universität Marburg ausgeführt worden sind, denen die Ungenauigkeiten in der Versuchsauswertung, die sich bei Regnault nachweisen lassen, nicht anhaften.

F. Richarz war durch folgende Tatsache zum Zweifel an der genauen Richtigkeit und Zuverlässigkeit der älteren c_p -Werte geführt worden:

Die Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalentes nach dem zuerst von Julius Robert Mayer angegebenen Prinzip aus der Differenz der beiden spezifischen Wärmen der Gase ergibt bei ihrer Ausführung für verschiedene Gase nach den bisherigen experimentellen c_p - und α -Werten ziemliche Abweichungen. Man erhält für Luft 423,8 mkg, Sauerstoff 423,5 mkg, Wasserstoff 423,1 mkg, Stickstoff 429,1 mkg.¹⁾ F. Richarz vermutete, daß diese Abweichungen des berechneten Wärmeäquivalentwertes der Unsicherheit in der Kenntnis der spezifischen Wärmen der einzelnen Gase zuzuschreiben sind und daß sie verschwinden, wenn die Werte der spezifischen Wärme c_p und des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen α neu und besser bestimmt sowie die individuellen Verschiedenheiten der Ausdehnungskoeffizienten berücksichtigt würden. Er beschloß deshalb, in seinem Institute eine exakte Neubestimmung der spezifischen Wärme c_p nach der Mischungsmethode und an Stelle von c_p auf akustischem Wege eine

1) H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, Theorie der Wärme, herausgeg. von F. Richarz, p. 196. Leipzig 1903.

solche des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen $\alpha = c_p/c_v$ für die verschiedenen Gase durchführen zu lassen. Zu den Untersuchungen wurden nur reinste Gase verwandt, und die c_p -Bestimmung wurde für das Temperaturintervall von $+20^\circ$ bis $+150^\circ$ C. vorgenommen.

Hrn. H. Everts wurde die Aufgabe gestellt, die spezifische Wärme c_p von chemisch reinem Stickstoff und Hr. O. Stoll, diejenige von reinem Sauerstoff neu zu bestimmen. Everts¹⁾ stellte den benötigten Stickstoff durch Erhitzen von je einem Gewichtsteil Kaliumnitrit, Ammoniumchlorid und Kaliumbichromat mit fünf Teilen ausgekochtem und ausgepumptem Wasser dar; zur Befreiung von Sauerstoff (Stickoxyden) und zur Trocknung leitete er das entwickelte Gas alsdann durch Ferrosulfatlösung, durch Kalilauge, durch Schwefelsäure, über reines Phosphorpentoxyd und schließlich über glühende Kupferspäne. Stoll²⁾ stellte den Sauerstoff elektrolytisch dar und ließ ihn zur Befreiung von event. von der Kathode her überdiffundiertem Wasserstoff über glühendes Kupferoxyd und zur Trocknung durch konzentrierte Schwefelsäure und über reines Phosphorpentoxyd streichen. Auf die Versuchsergebnisse der Herren Everts und Stoll werde ich unten kurz zu sprechen kommen. Mir selbst wurde die c_p -Bestimmung des Wasserstoffgases übertragen.

Wasserstoff ist sehr schwer vollkommen frei von Verunreinigungen zu erhalten. Ich habe zur Ausführung meiner Untersuchungen Gase benutzt, die durch Elektrolyse gewonnen waren, da diese noch am sichersten ein Wasserstoffgas von großer Reinheit liefert. Zunächst führte ich meine c_p -Messungen mit elektrolytisch gewonnenem Wasserstoff durch, der von der Firma F. Hellige & Co., Freiburg i. Br., in Stahlflaschen komprimiert in den Handel gebracht wird; dieses Gas besaß laut Analyse, die im Chemischen Laboratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt vorgenommen wurde, eine Reinheit von ca. 99,1 Proz. Ferner benutzte ich zu meinen Untersuchungen Wasserstoff, den ich selbst durch Elektrolyse von 30prozentiger Natronlauge (aus reinstem Kahlbaumschen

1) H. Everts, Inaug.-Diss., Marburg 1911.

2) O. Stoll, Inaug.-Diss., Marburg 1911.

Ätznatron bereit) unter Anwendung von Reinnickelelektroden herstellte. Die Gase wurden, ehe sie zur Untersuchung gelangten, aufs sorgfältigste durch konzentrierte Schwefelsäure und reines Phosphorpentoxyd getrocknet und auf Reinheit nochmals eudiometrisch und spektralanalytisch nachgeprüft.¹⁾

Ehe ich zur Bestimmung der spezifischen Wärme des Wasserstoffs schritt, bestimmte ich durch eine Reihe von Vorversuchen die spezifische Wärme c_p von kohlensäure- und staubfreier atmosphärischer Luft.

Die Versuchsanordnung (vgl. die beigegegebene Tafel XII) war derartig getroffen, daß ein und dieselbe Gasmenge zur Ausführung einer ganzen Reihe von Versuchen benutzt werden konnte. Das zu untersuchende Gas war in einem etwa 60 l fassenden Glasballon G_1 über Wasser aufgefangen. Die zur Ausführung eines Versuches benötigte Gasmenge wurde durch Zuströmenlassen von Wasser von dem Reservoir B_1 her aus dem Gasbehälter ausgetrieben. Der Druck, unter dem das Gas abfloß, konnte *vollkommen konstant* gehalten werden. G_1 stand zur Ermittlung des durch die Apparatur geschickten Gasvolumens auf einer Dezimalwage, die das Gewicht der zur Verdrängung des Gases nötigen Wassermenge mit Sicherheit auf 5 g zu bestimmen gestattete.

Das abgefllossene Gas gelangte nach Passieren der ganzen Versuchsanordnung in einen dem Glasballon G_1 vollkommen gleichen Gasbehälter G_2 , aus dem durch das ankommende Gas die entsprechende Wassermenge verdrängt wurde; der Wasserabfluß aus G_2 konnte derartig geregelt werden, daß das in dem Glasballon G_2 befindliche und eintretende Gas dauernd auf Atmosphärendruck blieb. Die Behälter G_1 und G_2 waren durch eine Rohrleitung verbunden, so daß am Ende eines jeden Versuches die zu einer neuen Bestimmung benötigte Gasmenge wieder von G_2 nach G_1 übergeleitet werden konnte. Das aus dem Ballon G_1 während eines Versuches verdrängte Gas durchstrich nun zunächst eine Reihe von Trockentürmen, Tr , die Chlorcalcium und reinstes, pulverförmiges Phosphorpentoxyd enthielten. In dem letzten der Trockentürme, Tr_5 ,

1) Bezüglich technischer Einzelheiten über die Reinigung und Darstellung der Gase und die dazu benötigten Apparate verweise ich auf meine Inauguraldissertation.

war ein kleines Hygrometer H aufgestellt, dessen unveränderte Zeigerstellung während des Versuches die absolute Trockenheit des strömenden Gases anzeigte. Das trockene Versuchsgas gelangte nach Verlassen von Tr_5 in ein kupfernes Erwärmungsgefäß E . In einer durch die Mitte des Kastens gehend zu denkenden Horizontalebene befanden sich nebeneinander liegend zwei dünnwandige, miteinander verbundene Kupferzylinder e_1 und e_2 , die mit feinen Kupferdrehspänen dicht angefüllt waren. Das Erwärmungsgefäß enthielt hochsiedendes Öl, das auf *vollkommen konstanter* Temperatur gehalten werden konnte. In das Ölbad tauchte ein in $1/10^\circ$ C. geteiltes Thermometer Th_3 ein, das mit einem in der Reichsanstalt geeichten Normalthermometer verglichen worden war; durch Fernrohrablesung konnte alsdann die Temperatur des Bades bis auf $1/100^\circ$ genau gemessen werden.

Das Gas trat in die mit den Spänen gefüllten Zylinder e_1 und e_2 ein, die die Temperatur des Ölbadbesaßen; beim Durchströmen dieses Röhrensystems mußte das Gas ebenfalls die Temperatur der Heizflüssigkeit annehmen. Mit der Badtemperatur trat das Gas aus E wieder aus und gelangte, nach Möglichkeit ohne einen Wärmeverlust zu erleiden, in das Kalorimeter K . Dieses war aus Feinsilber gefertigt und gleich im wesentlichen dem Kalorimeter, das E. Wiedemann¹⁾ und A. W. Witkowski²⁾ bei ihren Untersuchungen benutzt haben. Das Gas durchströmte die silbernen Röhren von K , die mit feinen Silberspänen dicht angefüllt waren; an diese Späne gab das Gas die in E aufgenommene Wärme ab. Sie wurde dann sofort weiter an die eingefüllte, die Röhren umgebende, genau abgewogene Wassermasse übertragen. Durch eine Öffnung des Deckels von K konnte das zur Messung der jeweiligen Temperatur des Kalorimeterwassers benutzte Normalthermometer N eingetaucht werden. N war für das Temperaturbereich von $+11^\circ$ bis $+25^\circ$ C. in $1/100^\circ$ geteilt, so daß sich durch Fernrohrablesung bequem noch $1/1000$ Grade gut schätzen ließen; das Thermometer war in der Reichsanstalt geeicht. —

1) l. c.

2) A. W. Witkowski, Philosophical Magazine and Journal of Science, Ser. 5. 42. Nr. 254. July 1896.

Um die Temperatur der Umgebung des Kalorimeters während eines Versuches konstant halten zu können, war dasselbe mit einem doppelwandigen, zylindrischen Gefäße U aus Zinkblech umgeben, das dauernd von Wasser von konstanter Temperatur durchströmt wurde.

Damit keine Feuchtigkeit von G_2 nach dem Kalorimeter zu gelangen vermochte, waren zur Sicherheit eine mit Chlorkalcium gefüllte Trockenflasche Th_6 und ein Trockenturm Th_7 , der pulverförmiges Phosphorpentoxyd enthielt, in die Rohrleitung eingeschaltet. — Die Verbindung der einzelnen Teile der Apparatur war fast durchweg unter Vermeidung von Gummischlauch vorgenommen worden, um vor einem Entweichen des Wasserstoffs infolge von Diffusion geschützt zu sein. — M_1 , M_2 , M_3 sind Wassermanometer, die stets den Druck des Gases in G_1 , bzw. in K oder G_2 abzulesen gestatteten. Die Temperaturen, welche die Thermometer N und Th_3 anzeigten, wurden von Minute zu Minute notiert.

Hervorgehoben sei noch, daß die Hauptbedingungen für ein exaktes Arbeiten nach der Mischungsmethode, vollkommene Druckkonstanz des Gases und durchweg gleiche Badtemperatur in E während der ganzen Versuchsdauer, bei der von mir getroffenen Versuchsanordnung stets erfüllt waren.

Ehe nun der eigentliche Versuch, die Durchleitung des Gases durch das Kalorimeter, begann, war schon ein Ansteigen der Temperatur des Kalorimeterwassers zu beobachten. Diese Temperaturerhöhung wurde hervorgebracht durch Überleitung von Wärme vom Erwärmungsgefäß E her und durch Wärmeaustausch mit der Umgebung. Beide Einflüsse blieben natürlich auch während und nach der Strömungszeit des Gases bestehen; es mußte also von der während der Strömungszeit des Gases beobachteten Temperaturerhöhung des Kalorimeters diejenige abgezogen werden, die jenen beiden eben genannten Ursachen zuzuschreiben ist, um die *wahre*, allein vom Gase bewirkte Temperaturerhöhung zu erhalten. Die nicht vom Gase bedingte Temperaturzunahme des Kalorimeters während der Strömungszeit, der Hauptperiode, ließ sich berechnen durch Beobachtung des Temperaturanstieges vor und nach dem Durchleiten des Gases durch E und K , während einer Vor- und einer Nachperiode.

Bezeichnen wir während der Vor-, Haupt- und Nachperiode die Mitteltemperatur des Kalorimeters bzw. mit T_0 , t , T_1 und die mittlere pro Minute durch Leitung vom Heizgefäß und Wärmeaustausch mit der Umgebung hervorgebrachte Temperaturzunahme des Kalorimeters mit m_0 , m , m_1 , so berechnet sich der pro Minute an der während der Hauptperiode beobachteten Temperaturerhöhung ϑ abzuziehende Betrag m , aus den Daten der Vor- und Nachperiode zu:

$$m = m_0 - \frac{m_0 - m_1}{T_1 - T_0} \cdot (t - T_0).$$

Da nun der während der Hauptperiode beobachtete Temperaturanstieg niemals vollkommen gleichmäßig erfolgt, so darf t nicht einfach gleich dem arithmetischen Mittel aus dem Anfangs- und dem Endwerte der Temperatur in der Hauptperiode gesetzt werden, wie dies in Anlehnung an E. Wiedemann meist geschah. Es ist vielmehr t als Variable zu betrachten und nach dem Vorschlage von F. Richarz¹⁾ die Korrektion für jede Minute der Hauptperiode einzeln zu berechnen. Dieselbe beträgt für die erste Minute:

$$m_{t_1} = m_0 - \frac{m_0 - m_1}{T_1 - T_0} \cdot (t_1 - T_0),$$

für die zweite Minute:

$$m_{t_2} = m_0 - \frac{m_0 - m_1}{T_1 - T_0} \cdot (t_2 - T_0),$$

.....

für die n te Minute:

$$m_{t_n} = m_0 - \frac{m_0 - m_1}{T_1 - T_0} \cdot (t_n - T_0),$$

wobei unter t_1 , t_2 , t_3 , ... t_n die Mitteltemperaturen für die einzelnen Minuten der Hauptperiode verstanden sind.

Statt nun an jeder einzelnen beobachteten minütlichen Temperaturerhöhung ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 , ... ϑ_n der Hauptperiode die Korrektion auszuführen und dann durch Summation der einzelnen minütlichen, wahren Temperaturerhöhungen ϑ'_1 , ϑ'_2 , ϑ'_3 , ... ϑ'_n die gesamte lediglich vom Gase bewirkte Temperaturerhöhung ϑ' zu erhalten, ist es einfacher, ϑ' durch eine einzige numerische Operation zu berechnen; wir bilden:

1) Berichtet durch A. Eggert, Anhang zur Inaug.-Diss. von Everts, Marburg 1911, p. 42 ff.

$$\begin{aligned}
 m_{t_1} + m_{t_2} + m_{t_3} + \dots + m_{t_n} &= \Sigma m_i \\
 &= n \cdot m_0 - \frac{m_0 - m_1}{T_1 - T_0} \cdot (t_1 - T_0 + t_2 - T_0 + t_3 - T_0 + \dots + t_n - T_0) \\
 \Sigma m_i &= n \cdot m_0 - \frac{m_0 - m_1}{T_1 - T_0} \cdot (\Sigma t - n \cdot T_0).
 \end{aligned}$$

Ziehen wir nun von der Summe der beobachteten Temperaturerhöhungen $\Sigma \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \dots + \vartheta_n$ den Betrag Σm_i ab, so erhalten wir die gesamte wahre Temperaturerhöhung während der Hauptperiode:

$$\vartheta' = \Sigma \vartheta - n \cdot m_0 + \frac{m_0 - m_1}{T_1 - T_0} \cdot (\Sigma t - n \cdot T_0).$$

Bemerkt sei noch, daß bei der Berechnung von ϑ' auch sämtliche während eines Versuches event. auftretende, durch Druckschwankungen bedingte adiabatischen Abkühlungen oder Erwärmungen des Gases als Korrektion entsprechend in Rechnung gesetzt wurden. Ferner mußte für die Wasserstoffversuche die Korrektion m_i aus einer Vor- und einer Nachperiode berechnet werden, während deren kein Wasserstoffgas in dem Röhrensystem von *E* und *K* enthalten war. Während nämlich der minütliche spontane Wärmegewinn bzw. -verlust des Kalorimeters vollkommen derselbe bleibt, besitzt die pro Minute aus dem Heizgefäß übergeleitete Wärme einen bedeutend größeren Wert, wenn in Vor- und Nachperiode Wasserstoff vorhanden ist, als wenn die Röhren von Luft erfüllt oder evakuiert sind.

Da nur Wasserstoff und Helium¹⁾, also Gase von sehr geringer Dichte und großer Beweglichkeit der Molekeln, diese große Überleitung der Wärme vom Heizgefäß zum Kalorimeter im ruhenden Gaszustande bewirken, so ist wohl die Regnaultsche Erklärungsweise²⁾ gerechtfertigt, daß in dem scheinbar ruhenden Gase innere Strömungen auftreten, die durch Konvektion die Überleitung von Wärme bewerkstelligen. Die inneren Strömungen hat man sich etwa so vorzustellen, daß sich in dem Gase im Verbindungsrohr zwischen Heizgefäß und Kalorimeter eine Zirkulation ausbildet, an der oberen Wandung des Verbindungsröhrchens vom heißen Erwärmungs-

1) A. Eggert, Inaug.-Diss., Marburg 1910, p. 66ff.

2) l. c., p. 119, 120.

gefäß zum kälteren Kalorimeter, an der unteren zurück zum Heizgefäß. Bei diesem Vorgange bleibt das äußere Druckgleichgewicht des Gases vollkommen gewahrt. Diese Konvektionsströmungen können jedoch nur in der Vor- und in der Nachperiode, in dem ruhenden Gaszustande, vorhanden sein, während der Hauptperiode, in der Wasserstoff unter einem gewissen Überdruck durch Heizgefäß und Kalorimeter strömt, verschwinden sie ganz. Die minütliche, unbeabsichtigt nebenhergehende Überleitung von Wärme wird während der Hauptperiode infolgedessen von selbst auf den Betrag herabgesetzt werden, welcher der Evakuierung oder der Luftfüllung des Apparates entspricht.

Das Gewicht der durch das Kalorimeter geflossenen Gasmasse berechnet sich nach der Formel:

$$G = \frac{B + P - e}{760} \cdot \frac{273}{273 + T} \cdot v \cdot s.$$

B = Barometerstand, auf 0° reduziert.

P = Überdruck des Gases, abgelesen an M_1 .

e = Spannkraft des Wasserdampfes in G_1 .

T = Temperatur des Gases in G_1 .

v = Volumen des Gases (Gewicht des während des Versuches in G_1 eingeflossenen Wassers).

s = Dichtigkeit des Gases.

Die im Heizgefäß aufgenommene Wärmemenge gab das Gas im Kalorimeter ab an einen Gesamtwasserwert W , der sich aus dem Gewicht der eingefüllten Wassermasse und den Wasserwerten von K und des eintauchenden Teiles von N zusammensetzte.

Bezeichnen wir die Differenz zwischen der Mitteltemperatur des Erwärmungsgefäßes und der des Kalorimeters während der Hauptperiode mit Θ , so ist die spezifische Wärme des untersuchten Gases:

$$c_p = \frac{W \cdot \vartheta'}{G \cdot \Theta}.$$

Vorversuche, die zur Bestimmung der spezifischen Wärme von kohlenstofffreier atmosphärischer Luft bei einer Badtemperatur von 50° C. angestellt wurden, lieferten den Mittelwert:

$$c_p (\text{Luft}) = 0,23764 \pm 0,00035$$

in guter Übereinstimmung mit den Resultaten Regnaults. Auf eine Vergleichung mit dem c_p -Werte von Scheel und Heuse werde ich unten zu sprechen kommen.

Die Ergebnisse der bei einer Badtemperatur von 50° bzw. 75° oder 100° ausgeführten Wasserstoffversuche sind in den folgenden Tabellen I, II, III zusammengestellt. Bei jeder

Tabelle I.

Badtemperatur +50° C.

Nr.	W	G	n	$\Sigma \vartheta$	ϑ'	ϑ	c_p
1	76,2547	1,4545	5	2,235	2,039	31,264	3,4192
2	76,2547	1,4661	5	2,307	2,121	32,401	3,4048
3	77,5859	1,1731	4	1,983	1,790	34,718	3,4084
4	77,5859	1,1582	4	1,790	1,662	32,575	3,4178
5	76,2645	1,4907	5	2,297	2,135	31,674	3,4486
6	76,2645	1,7983	6	2,908	2,703	33,348	3,4469
7	76,2645	1,175	4	1,900	1,743	33,056	3,4225
8	76,2645	1,4572	5	2,180	2,043	31,117	3,4362
9	76,4543	1,7279	6	2,754	2,528	32,811	3,4090
10	76,4543	1,443	5	2,268	2,064	32,123	3,4042
11	77,6249	1,4982	5	2,332	2,195	33,134	3,43225
12	77,6249	1,4845	5	2,280	2,106	32,181	3,4219
13	77,6249	1,487	5	2,360	2,208	33,681	3,4223
14	77,6249	1,4868	5	2,310	2,155	32,905	3,4193
15	74,0008	1,4302	5	2,273	2,100	31,660	3,4319
16	74,0008	1,7205	6	2,668	2,495	31,379	3,4198
17	74,0008	1,7106	6	2,602	2,414	30,550	3,4183
18	76,7389	1,4456	5	2,053	1,918	29,927	3,4022
19	76,7389	0,8983	5	1,499	1,340	33,443	3,4226
20	76,7389	0,8889	5	1,450	1,250	31,597	3,4152
21	75,8619	0,5815	4	1,091	0,910	34,700	3,4210
22	75,8619	0,8512	5	1,485	1,301	33,617	3,4490
23	75,8619	0,5966	4	1,067	0,916	34,228	3,4028
24	75,8579	1,2853	5	2,037	1,879	32,530	3,40925
25	75,8579	1,2483	5	1,927	1,778	31,611	3,4180
26	75,8579	1,2376	5	2,078	1,915	34,146	3,4375
27	75,8579	1,1958	5	1,913	1,751	32,464	3,4218

Mittelwert: $c_p = 3,4216 \pm 0,0017$.

einzelnen Tabelle ist der Mittelwert von c_p angegeben. Es bedeutet:

W den Gesamtwasserwert, an den die Wärmeabgabe erfolgt.

G das Gewicht des durch das Kalorimeter geschickten Gases in Gramm.

n die Dauer der Hauptperiode in Minuten.

$\Sigma \vartheta$ die beobachtete Temperaturerhöhung des Kalorimeters während der Hauptperiode.

ϑ' die vom Gase hervorgebrachte Temperaturerhöhung des Kalorimeters während der Hauptperiode.

Θ die Temperaturdifferenz zwischen Heizgefäß und Kalorimeter.

c_p die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck.

Tabelle II.

Badtemperatur + 75° C.

Nr.	W	G	n	$\Sigma \vartheta$	ϑ'	Θ	c_p
1	77,2873	1,4444	5	3,802	3,526	55,357	3,4083
2	77,2873	1,4463	5	3,944	3,661	57,488	3,4031
3	77,2872	1,4643	5	3,976	3,722	57,239	3,43225
4	77,2878	1,4667	5	3,770	3,493	53,718	3,4264
5	77,2873	1,4542	5	3,813	3,555	54,775	3,4494
6	77,2873	1,1932	4	3,113	2,878	54,671	3,4098
7	77,2873	1,1781	4	3,074	2,839	54,365	3,4258
8	77,3099	1,1674	4	3,258	3,025	58,709	3,4125
9	73,951	1,4877	5	4,320	4,033	58,760	3,4120
10	73,951	1,5063	5	4,225	3,972	56,822	3,4319

Mittelwert: $c_p = 3,4212 \pm 0,0031$.

Tabelle III.

Badtemperatur + 100° C.

Nr.	W	G	n	$\Sigma \vartheta$	ϑ'	Θ	c_p
1	73,951	1,2344	4	5,246	4,878	85,486	3,4164
2	73,951	0,940	3	3,997	3,712	85,388	3,4202
3	73,951	1,2402	4	5,157	4,811	83,731	3,4261
4	73,951	1,2363	4	5,147	4,791	83,465	3,4337
5	73,951	0,9341	3	3,889	3,604	83,563	3,4145

Mittelwert: $c_p = 3,4226 \pm 0,0023$.

Eine Temperaturabhängigkeit des c_p -Wertes von Wasserstoff läßt sich also für das Temperaturintervall von + 20° bis

+100° C. nicht feststellen. Die Versuche wurden unter Anwendung von verschiedenen Überdrücken (10—25 cm Wasser) angestellt, und es ergab sich, daß die erhaltenen c_p -Werte auch als unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit des Gases betrachtet werden dürfen. Ferner wurden innerhalb der Fehlergrenzen dieselben Resultate erhalten, einerlei ob der von Hellige bezogene elektrolytische Bombenwasserstoff oder das von mir selbst hergestellte Gas zu den Bestimmungen benutzt wurde.

Unter Berücksichtigung der Gewichte der Mittelwerte der einzelnen Versuchsreihen berechnet sich das Gesamtmittel aller ausgeführten Messungen zwischen +20° und +100° C. zu:

$$c_p(\text{Wasserstoff}) = 3,4219 \pm 0,0013.$$

Aus dem gefundenen c_p und dem Molekulargewicht $M = 2,016$ ergibt sich mittels der ganz allgemein gültigen Beziehung¹⁾ $M \cdot c_v = M \cdot c_p - 1,986$ als Molekularwärme

$$M \cdot c_v = 4,913.$$

Dieses Resultat stimmt gut überein mit dem Werte 4,966, den nach der für zweiatomige Gase erweiterten Theorie des Gesetzes von Dulong und Petit¹⁾ die Molekularwärme des Wasserstoffs besitzen muß. Aus den bisherigen Messungen der spezifischen Wärme berechnet sich der sehr abweichende Wert $M \cdot c_v = 4,88$, was um so verwunderlicher ist, als doch Wasserstoff dem Zustande eines idealen Gases ziemlich nahe-kommend angesehen zu werden pflegt.

Die Versuche von H. Everts²⁾ führten für das Temperaturintervall von +24° bis +150° C. zu dem Werte

$$c_p(\text{Stickstoff}) = 0,2429 \pm 0,00013,$$

und O. Stoll³⁾ fand für das Gebiet von +18° bis +150° C.

$$c_p(\text{Sauerstoff}) = 0,21731 \pm 0,00013.$$

Bei einer Vergleichung der c_p -Werte sieht man, daß die Resultate, welche im Physikalischen Institut der Universität Marburg erhalten wurden, für die Gase Luft, Stickstoff und

1) F. Richarz, Marb. Sitz.-Ber. 1905. p. 93—96; Zeitschr. f. anorg. Chemie 58. p. 356 ff. 1908.

2) l. c., p. 36.

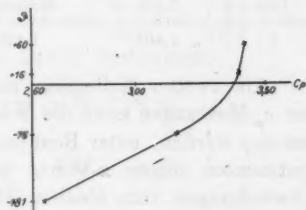
3) l. c., p. 31.

Sauerstoff niedriger sind als die von den Herren Scheel und Heuse bei $+20^{\circ}\text{C}$. bestimmten Werte $c_p(\text{Luft}) = 0,2406$, $c_p(\text{Stickstoff}) = 0,2492$, $c_p(\text{Sauerstoff}) = 0,2182$. Der von mir für die Mitteltemperatur $+60^{\circ}\text{C}$. (Temperaturintervall $+20^{\circ}$ bis $+100^{\circ}\text{C}$.) bestimmte c_p -Wert des Wasserstoffs 3,4219 würde dagegen nicht in Widerspruch stehen mit den Messungen von Scheel und Heuse. Von ihnen ist die spezifische Wärme des Wasserstoffs bestimmt worden

bei $\vartheta =$	-181°	-76°	$+16^{\circ}$
zu: $c_p =$	2,644	3,157	3,403

Scheel und Heuse konstatieren also mit steigender Temperatur ein sehr schnelles Anwachsen der spezifischen Wärme. Stellt man nun graphisch ihre c_p -Werte zusammen mit meinem

Werte in demselben Koordinatensystem als Funktion der Temperatur dar, so zeigt sich (vgl. beistehende Kurve), daß das obere Kurvenstück (bis zu meinem c_p -Wert) ungezwungen die graphische Fortsetzung des unteren Teiles der Kurve bildet, der die



Scheel- und Heuseschen Resultate wiedergibt. Insbesondere ist auf folgendes aufmerksam zu machen. Durch die neueren Resultate bezüglich starker Abnahme der spezifischen Wärmen bei Temperaturerniedrigung auch für die Gase werden die älteren theoretischen und experimentellen Resultate bezüglich annähernder Konstanz bei mittleren und höheren Temperaturen nicht berührt. Vielmehr ergeben auch die neueren Anschauungen asymptotische Annäherung an die alten Werte bei gewöhnlicher Temperatur.

Es sei nun zunächst darauf hingewiesen, daß die aus unseren c_p -Werten nach der auf p. 772 angegebenen Weise berechneten Daten für das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen bei sämtlichen untersuchten Gasen aufs beste übereinstimmen mit den zuverlässigen aus Schallgeschwindigkeits-

messungen oder nach der Methode von Clément und Désormes direkt bestimmten α -Werten:

Gas	α	α	α
	berechnet aus c_p	direkt bestimmt	Mittelwert aus den Angaben von:
Luft . . .	1,4047 (Escher)	1,4047	(Röntgen ¹⁾ , Lummer und Pringsheim ¹⁾ , Regnault ¹⁾ , Moll und van Beek ¹⁾ , Thiesen. ²⁾
Stickstoff . .	1,412 (Everts)	1,412	Buckendahl ³⁾ , Travers ⁴⁾ .
Sauerstoff . .	1,3998 (Stoll)	1,402	K. H. Küster. ⁵⁾
Wasserstoff	1,404 (Escher)	1,402	(Röntgen ⁶⁾ , Lummer und Pringsheim ⁷⁾ , Travers. ⁴⁾

Scheel und Heuse berechnen:

Gas	Luft	Stickstoff	Sauerstoff	Wasserstoff
α	1,401	1,400	1,399	1,407

Als zweites Kriterium zur Nachprüfung der Richtigkeit der c_p -Messungen kann die Wärmeäquivalentberechnung herangezogen werden, unter Benutzung der unabhängig von c_p direkt bestimmten obigen α -Werte und unter Berücksichtigung der Abweichungen vom idealen Gaszustand. Wie schon die auf Veranlassung von F. Richarz in meiner Dissertation, p. 71 und 72, gegebene elementare Ableitung lehrt, muß alsdann außer den Daten für c_p und α auch der individuelle Ausdehnungskoeffizient des Gases bei konstantem Druck bekannt sein, und müßten die auch dann noch bleibenden Differenzen vermutlich verschwinden, wenn man die idealen Gasgesetze

1) Vgl. Winkelmann, Handb. der Phys., 2. Aufl. 1906. 3. (Wärme). p. 216 ff.

2) M. Thiesen, Ann. d. Phys. 25. p. 506 ff. 1908.

3) Buckendahl, Inaug.-Diss., Heidelberg 1906.

4) M. W. Travers, Experimentelle Untersuchungen von Gasen. Braunschweig, Vieweg & Sohn 1905, p. 309.

5) K. H. Küster, Inaug.-Diss., Marburg 1911, p. 31.

6) A. Winkelmann, l. c., p. 225.

7) Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen; 4. Aufl., Berlin 1912. p. 775.

fallen ließe.¹⁾ Ich habe dann diese weiteren Abweichungen vom idealen Gaszustand berücksichtigt und die Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalentes aus den spezifischen Wärmen für die zweiatomigen Gase unter Zugrundelegung der van der Waalsschen Zustandsgleichung durchgeführt.²⁾ Wir gehen dabei aus von der für jeden homogenen Körper gültigen thermodynamischen Beziehung:³⁾

$$(1) \quad -J \cdot (c_p - c_v) \cdot \frac{\partial v}{\partial p} = \vartheta \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right)^2.$$

Wir wenden nun diese Beziehung auf ein Gas an, dessen Zustand durch die van der Waalssche Gleichung gegeben sein soll, die wir in der Form

$$(2) \quad \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = \Re \cdot \vartheta$$

schreiben. Für $p = 1$ und $\vartheta = 273$ soll $v = 1$ definiert sein; a, b und $\Re = \frac{(1+a)(1-b)}{273}$ haben ganz bestimmte individuelle Werte für jedes Gas. — Die Werte von $\frac{\partial v}{\partial p}$ und $\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)^2$ der Gleichung (1) lassen sich alsdann aus (2) bestimmen:

$$p \cdot v + \frac{a}{v} - b \cdot p - \frac{a b}{v^2} - \Re \cdot \vartheta = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial v}{\partial p} = - \frac{v - b}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2 a b}{v^3}},$$

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{\Re}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2 a b}{v^3}}.$$

Durch Einsetzen von (3) und (4) in Gleichung (1) erhalten wir:

$$+ J \cdot (c_p - c_v) \cdot \left(\frac{v - b}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2 a b}{v^3}} \right) = \vartheta \cdot \left(\frac{\Re}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2 a b}{v^3}} \right)^2,$$

$$J \cdot (c_p - c_v) = \frac{\Re \cdot \vartheta}{v - b} \cdot \frac{\Re}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2 a b}{v^3}}.$$

1) F. Richarz, Marburger Sitz.-Ber. 13. Nov. 1912; vgl. auch meine Dissert. p. 77.

2) W. Escher, Marburger Sitz.-Ber., Nr. 6, 13. Nov. 1912.

3) Vgl. z. B. H. v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, Theorie der Wärme, herausgeg. von Richarz, p. 227, Gleichung 54. Leipzig 1903.

Nach Gleichung (2) hat $\frac{\Re \cdot \vartheta}{v - b}$ den Wert $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)$, so daß

$$J \cdot (c_p - c_v) = \left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot \frac{\Re}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}}.$$

Da der Ausdehnungskoeffizient des betrachteten Gases (bei konstant gehaltenem Druck) durch die Beziehung

$$(5) \quad \alpha = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial v}{\partial \vartheta}$$

definiert ist, so wird

$$\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \alpha \cdot v_0;$$

mithin können wir nach (4) und (5) für

$$\frac{\Re}{p - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}} = \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \alpha \cdot v_0$$

setzen. Es wird also:

$$(6) \quad J \cdot (c_p - c_v) = \left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot \alpha \cdot v_0.$$

Führen wir nun noch den Wert für das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ in Gleichung (6) ein, so ergibt sich:

$$(7) \quad J = \frac{1}{c_p} \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \alpha \cdot v_0 \cdot \left(p + \frac{a}{v^2}\right).$$

Zur Berechnung des mechanischen Wärmeäquivalentes müssen wir also die unabhängig voneinander bestimmten Werte für die spezifische Wärme c_p des Gases, für das Verhältnis κ der beiden spezifischen Wärmen und für den individuellen Ausdehnungskoeffizienten α des Gases (bei konstantem Druck) kennen, ferner muß uns der Wert der van der Waalsschen Konstante a für das betreffende Gas gegeben sein.

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung, wenn wir dieselbe im C.G.S.-System durchführen und als betrachtete Gasmenge ein Grammolekül wählen. Für die Werte der van der Waalsschen Konstanten ist nun als Druckeinheit die Atmosphäre und als Volumeinheit die sogenannte theoretische Normaleinheit angenommen, d. h. das Volumen, das die betreffende Menge Stoff bei 0° und der Druckeinheit im idealen Gaszustande einnehmen würde; für ein Grammolekül

ist also die Volumeinheit gleich 22410 ccm, wenn die Atmosphäre Druckeinheit ist. Wir haben bei den Berechnungen demnach zuerst

den Versuchsdruck p in Atmosphären auszudrücken; das Anfangsvolumen v_0 haben wir als Volumen von einem Grammmolekül des betrachteten Gases bei 0°C . und dem Versuchsdruck p in theoretischen Normaleinheiten zu rechnen, und als Volumen v das Volumen von einem Grammmolekül des betrachteten Gases bei der mittleren Versuchstemperatur, ebenfalls in theoretischen Normaleinheiten gerechnet, zu setzen. Da wir nun im C.G.S.-System rechnen, so ist der erhaltene Wert für den Ausdruck $\left[v_0 \cdot \left(p + \frac{a}{v^2} \right) \right]$ unserer obigen Gleichung noch mit 22410^1) und mit 1013200 , dem Wert der Atmosphäre in absoluten Einheiten²⁾, zu multiplizieren.

Die Berechnung führt dann mit unseren Daten für c_p zu folgenden Werten für das mechanische Wärmeäquivalent:

Gas	J in Erg
Luft . . .	$4,209 \cdot 10^7$
Stickstoff . .	$4,186 \cdot 10^7$
Sauerstoff .	$4,188 \cdot 10^7$
Wasserstoff .	$4,202 \cdot 10^7$

Die erhaltenen J -Werte weichen von dem Werte $4,189 \cdot 10^7$ Erg, den kürzlich die Deutsche Physikalische Gesellschaft als maßgebend aus sämtlichen vorliegenden experimentellen Bestimmungen abgeleitet hat³⁾, um nur 0,5—4,8 Promille ab.

Mit den Resultaten, die Scheel und Heuse in ihrer letzten Veröffentlichung in diesen Annalen mitteilen, läßt sich zum Vergleich eine Wärmeäquivalentberechnung nicht durchführen, da sie keine Angaben über die angewandten Versuchsdrucke machen. Unter Benutzung ihres in der ersten Mit-

1) Landolt-Börnstein, l. c., p. 189.

2) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 11. Aufl., p. 669. Leipzig, Teubner 1911.

3) Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 12. N. 11. p. 476. 1910.

teilung an dieser Stelle angegebenen c_p -Wertes für Luft berechnet sich das mechanische Wärmeäquivalent zu $J = 4,155 \cdot 10^7$ Erg. Während also die Berechnung bei Benutzung meines c_p -Wertes für Luft einen Wert $(4,209 \cdot 10^7)$ liefert, der um 4,8 pro Mille größer ist als der Wert der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, ergibt sich bei Benutzung des von Scheel und Heuse für Luft bestimmten c_p ein Wärmeäquivalentwert $(4,155 \cdot 10^7)$, der um 8 Promille kleiner als derjenige der Deutschen Physikalischen Gesellschaft ist.

Hanau am Main, im Juli 1913.

(Eingegangen 20. August 1913.)

von L
im J
Marb
wisse
die A
F. A
fähig
zu d
quant
nur e
über
tation
Herst
Zeitsc
achtu
zweit
char

148. p
3
4
1912;
5
Wied.
u. 237
Situan
1905, 1
& 1911

**5. Anomalien der spezifischen Wärme
gewisser Legierungen;
von Oskar Richter.**

Um den Einfluß der Elektronen auf die spezifische Wärme von Metallen bzw. Legierungen zu untersuchen, unternahm ich im Jahre 1906 im Physikalischen Institute der Universität zu Marburg eingehende kalorimetrische Beobachtungen an gewissen Legierungen. Ich ging dabei aus von den Untersuchungen, die A. Matthiessen¹⁾, C. Calvert und R. Johnson²⁾, sowie F. A. Schulze³⁾ über die elektrische und thermische Leitfähigkeit bestimmter Legierungen angestellt hatten, und kam zu dem Ergebnisse, daß die freien elektrischen Elementarquanten für die spezifische Wärme der Metalle wohl höchstens nur eine untergeordnete Rolle spielen. Ausführlich habe ich⁴⁾ über diese meine Beobachtungen berichtet in meiner Dissertation, in den Annalen der Physik und insbesondere über die Herstellung einer eigenen, sehr empfindlichen Apparatur in der Zeitschrift für Instrumentenkunde. Mit demselben Beobachtungsmaterial konnte man auch an die Untersuchung einer zweiten Frage herantreten, nämlich jener, ob die von F. Richarz⁵⁾ zur Begründung des Gesetzes von Dulong und Petit

1) A. Matthiessen, Pogg. Ann. **110**. p. 190. 1860.

2) C. Calvert u. R. Johnson, Phil. Trans. Roy. Soc. London **148**. p. 349. 1858.

3) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **9**. p. 555. 1902.

4) O. Richter, Marburger Diss. 1908; Ann. d. Phys. **39**. p. 1590. 1912; Zeitschr. f. Instrumentenk. **32**. p. 177, 234. 1912.

5) F. Richarz, Sitzungsber. d. Phys. Ges. zu Berlin, **24**. Febr. 1893; Wied. Ann. **48**. p. 708. 1893; **67**. p. 704. 1899; Naturw. Rundsch. **9**. p. 221 u. 237. 1894; **15**. p. 221. 1900; Limpricht-Festschrift, Greifswald 100; Sitzungsber. d. Ges. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg 1904, p. 61; 1905, p. 100; Zeitschr. f. anorg. Chem. **58**. 1908; Marburger Sitzungsber. **3**. 1912; Ann. d. Phys. **39**. p. 1617. 1912.

gegebene „kinetische Theorie fester Elemente“ sowie deren Folgerungen auch auf *Gemische von Elementen* ausdehnbar seien. Die aus der genannten Theorie gefolgerte Regel, daß ein *Element in demjenigen Zustande die größere spezifische Wärme hat, in welchem es die geringere Dichte besitzt*, hat sich nämlich nach den zu ihrer Prüfung im Marburger Physikalischen Institute eigens angestellten Untersuchungen an chemisch isolierten Elementen, und zwar an Metalloiden mit allotropen Modifikationen durch A. Wigand¹⁾ und an Metallen in verschiedenem Bearbeitungszustande durch W. Schlett²⁾, ausnahmslos bestätigt gefunden.

Zur Untersuchung der Frage, wie sich zu der Richarz'schen Regel wohl *Gemische von Elementen* stellen, schienen Metalllegierungen sehr geeignet zu sein, da man festgestellt hat, daß beim Zusammenschmelzen von Metallelementen zu Legierungen sich vielfach andere Dichteverhältnisse einstellen, als man nach der prozentualen Teilnahme der einzelnen Elemente erwarten sollte, und als man nach der sogenannten Mischungsregel, die auf der Auffassung beruht, daß Legierungen sich in physikalischer Hinsicht wie mechanische Gemenge ihrer Komponenten verhalten, berechnen würde. Gilt nämlich auch für solche Fälle die Richarz'sche Regel, so müssen die beobachteten Werte der spezifischen Wärme der Legierung in den Mischungsverhältnissen größer sein als die nach der Mischungsregel berechneten, in welchen die beobachteten Werte der Dichte kleiner sind als die nach der Mischungsregel berechneten, und umgekehrt. Die Abweichung des physikalischen Verhaltens einer *Legierung* gegenüber dem gleichartigen Verhalten des *mechanischen Gemenges* aus denselben Komponenten — das letztere etwa in sehr fein pulverisiertem Zustande, für den die sogenannte Mischungsregel für physikalische Eigenschaften in jedem Falle gilt — könnte in bestimmten Fällen vielleicht mit einer „*Allotropisierung*“ beim Zusammenschmelzen verglichen werden, so z. B. der Dichteunterschied zwischen mechanischem Gemenge und Legierung mit dem Dichteunterschied zwischen allotropen Modifikationen ein und desselben Elementes. Andere Abweichungen des

1) A. Wigand, Diss. Marburg 1905; Ann. d. Phys. **22**, p. 64 u. 90 1907.

2) W. Schlett, Diss. Marburg 1907; Ann. d. Phys. **26**, p. 201. 1908

physikalischen Verhaltens der Legierungen von der Mischungsregel, so vor allem die starken Schmelzpunkterniedrigungen bei ganz geringen Beimengungen einer Komponente, haben dazu geführt, die Legierungen als *feste Lösungen* zu betrachten, während man aus wiederum anderen Eigentümlichkeiten der Legierungen gegenüber ihren Komponenten auf die Bildung von *chemischen Verbindungen* in ihnen nach einfachen Atomverhältnissen schließen zu müssen geglaubt hat.¹⁾ Da all diese Eigentümlichkeiten durch die für die einzelnen Fälle charakteristischen Molekularkonstitutionen bedingt sind, so muß eine Untersuchung der betreffenden Legierungen auf die Richarzsche Theorie und Regel von Interesse sein. Ein erhöhtes Interesse aber muß die kalorimetrische Untersuchung jener Legierungen bieten, bei denen sich unter Beibehalt der Zusammensetzung, aber durch eine veränderte thermische Behandlung während des Gusses oder nach demselben eine Verschiedenheit in der Molekularstruktur bildet, die sich besonders auch in der *Magnetisierbarkeit* bestimmter Legierungen bemerkbar macht. Seit einer Reihe von Jahren werden im Marburger Physikalischen Institute ununterbrochen Umwandlungs- und Alterungsstudien an Heuslerschen Legierungen gemacht, unter denen diejenigen von E. Take²⁾ wohl besondere Erwähnung verdienen; es sind hier bereits auch im Anschluß an meine kalorimetrischen Untersuchungen Beobachtungen ausgeführt worden, die bei gewissen Legierungen einen Zusammenhang zwischen spezifischer Wärme und Magnetisierbarkeit sowie eine Abhängigkeit beider von der „thermischen Vorgeschichte“ der betreffenden Legierungen dartun.³⁾

Im folgenden sollen nun die Legierungsreihen Wismut-Zinn und Wismut-Blei zunächst auf ihr Verhalten zur Richarzschen Regel untersucht werden. Für die spezifische Wärme verwende ich dabei die Werte, welche ich aus meinen Beobachtungen für die Untersuchung über den Einfluß der freien Elektronen auf die spezifische Wärme bei Metallen er-

1) Z. B. F. Richarz, F. Heusler, E. Haupt^a u. W. Starck, Marburger Sitzungsber. 5. p. 237. 1914.

2) E. Take, Abhandl. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. Math.-Physik. Klasse. Neue Folge 8. Nr. 2, 127 p. 1911; Naturw. Rundsch. 26. p. 505—508 u. 521—524. 1911.

3) E. Dippel, Dissert. Marburg 1910.

hielt, und die ich vor kurzem in diesen Annalen¹⁾ mitteilte, während ich für das spezifische Gewicht dieser Legierungen die von Carty und Maey²⁾ gefundenen Werte heranzog.

Die theoretische Berechnung der spezifischen Wärme und des spezifischen Gewichtes binärer Legierungen geschieht nach der auf der Mischungsregel beruhenden Formel

$$S = \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{m_1 + m_2};$$

darin bedeuten S die spezifische Wärme bzw. das spezifische Gewicht der Legierung, s_1 und s_2 die gleichen spezifischen Eigenschaften der Komponenten, und m_1 und m_2 die Mengenprocente, mit denen sich die beiden Komponenten an der Zusammensetzung der Legierung beteiligen, wobei allerdings zu beachten ist, daß bei Bestimmung der spezifischen Wärme Gewichtsprocente und bei Bestimmung des spezifischen Gewichtes Volumenprocente in Rechnung zu setzen sind.³⁾ Die berechneten und beobachteten Werte für die spezifische Wärme und für das spezifische Gewicht sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt und durch die zugehörigen Kurven graphisch veranschaulicht. Bei letzteren bedeuten die Abszissen, von links nach rechts gehend, die Zugaben von Zinn bzw. Blei zu Wismut. Die Ordinaten stellen die für die betreffenden Mischungsverhältnisse erhaltenen Werte der spezifischen Wärme

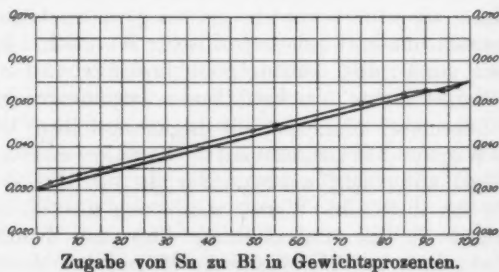


Fig. 1.

Die spezifische Wärme der Wismut-Zinnlegierungen.

1) O. Richter, Ann. d. Phys. **39**, p. 1590. 1912.

2) Landolt u. Börnstein, Physik.-chem. Tabellen; Carty, Pogg. Ann. **110**, p. 34. 1860; Maey, Zeitschr. f. physik. Chemie **38**, p. 269. 1901.

3) O. Richter, Diss. Marburg 1908; Ann. d. Phys. **39**, p. 1599. 1912.

bzw. des spezifischen Gewichtes dar. Die für diese beiden physikalischen Eigenschaften theoretisch berechneten Werte sind je durch eine Gerade dargestellt, die die beiden Punkte verbindet, welche der betreffenden Eigenschaft der beiden reinen Komponenten entsprechen.

Tabelle I.

Die spezifische Wärme der Wismut-Zinnlegierungen.

Nr.	Gewichts- prozent		Gewicht in g	Temp.	Korrigierte Quecksilber- aufnahme	Spezifische Wärme beobachtet	Spezifische Wärme berechnet
	Bi	Sn					
1	100	0	53,179	100,00	2,4655	0,029928	[0,029928]
2	99	1	47,147	100,00	2,2103	0,030260	0,030181
3	97	3	53,376	100,00	2,5972	0,031413	0,030686
4	94	6	35,611	99,00	1,7489	0,032030	0,031444
5	90	10	47,512	99,30	2,4410	0,033399	0,032457
6	85	15	50,275	99,80	2,6616	0,034244	0,033719
7	50	50	48,774	100,10	3,2828	0,043406	0,042563
8	25	75	41,292	100,00	3,1915	0,049895	0,048850
9	15	85	40,283	100,00	3,2515	0,052106	0,051408
10	7	93	40,128	99,60	3,3083	0,053434	0,053319
11	3	97	38,710	99,65	3,2358	0,054151	0,054440
12	0	100	39,212	98,80	3,3127	0,055198	[0,055198]

Tabelle II.

Das spezifische Gewicht der Wismut-Zinnlegierungen.

Vol.-Prozent		Spezifisches Gewicht	Vol.-Prozent		Spezifisches Gewicht
Bi	Sn		Bi	Sn	
0	100	7,294	87,8	12,2	9,485
7,0	92,5	7,438	93,5	6,5	9,614
31,0	69,0	7,943	95,6	4,4	9,675
37,5	62,5	8,112	97,3	2,7	9,737
47,5	52,5	8,339	99,1	0,9	9,774
64,2	35,8	8,772	100	0	9,823
78,2	21,8	9,178			

Betrachten wir zunächst die Werte für die Legierungen der Wismut-Zinnreihe. Wir sehen, daß die beobachteten

Werte für das spezifische Gewicht kleiner, daß dagegen diejenigen für die spezifische Wärme größer sind als die berechneten. — Daß dabei die Werte mit ganz geringem Wismutgehalt etwas abweichen, ist eine Erscheinung, die sich gerade

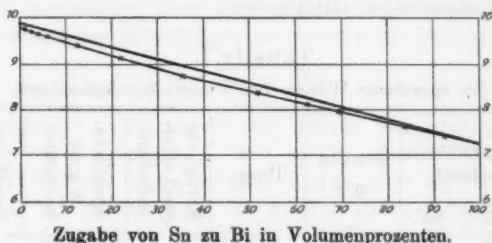


Fig. 2.

Das spezifische Gewicht der Wismut-Zinnlegierungen.

an den Enden solcher Bestimmungsreihen für das physikalische Verhalten von Legierungen oft bemerkbar macht und offenbar ihren Grund in einer eigenartigen Molekularstruktur bei den betreffenden Mischungsverhältnissen hat; besonders typisch hierfür sind die bereits erwähnten starken Schmelzpunktserniedrigungen. — Bei den Wismut-Zinnlegierungen

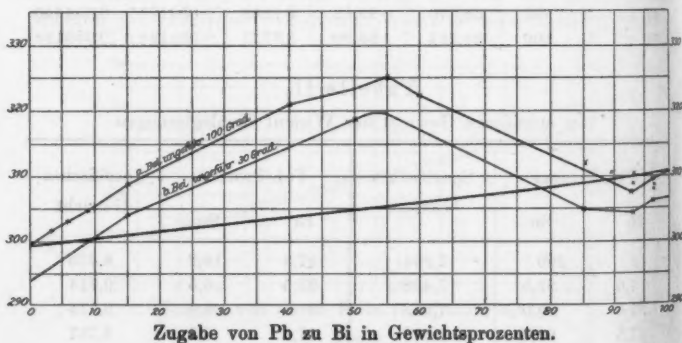


Fig. 3.

Die spezifische Wärme der Wismut-Bleilegierungen.

entspricht also einer Erniedrigung des spezifischen Gewichtes eine Erhöhung der spezifischen Wärme, für sie scheint also die Richarzsche Regel zu gelten.

Die Ergebnisse meiner kalorimetrischen Bestimmungen an den Wismut-Bleilegierungen zeigen überraschende Abweichungen von der Mischungsregel, wie schon ein Blick auf die Tabelle III und auf die Kurven in Fig. 3 mit ihrem ausgeprägten Maximum und Minimum erkennen läßt.

Tabelle III.

Die spezifische Wärme der Wismut-Bleilegierungen
(unter Graphit gegossen).

Nr.	Gewichts- prozent		Gewicht in g	Temperatur	Korrigierte Quecksilber- aufnahme	Spezifische Wärme	Spezif. Wärme bei niedrigerer Temperatur	
	Bi	Pb					Temp.	
1	100	0	50,005	99,5	2,2879	0,029925	32,15	0,029381
2	96,5	3,5	43,240	99,2	2,0025	0,030152		
3	94	6	54,0113	99,1	2,5096	0,030267		
4	91	9	41,698	99,6	1,9595	0,030457		
5	85	15	47,970	100,4	2,303	0,030368	32,0	0,030415
6	60	40	57,3733	99,8	2,8438	0,032069		
7	50	50	56,2415	98,4	2,770	0,032310	32,0	0,031858
8	45	55	56,4744	99,4	2,8275	0,032515		
9	40	60	56,5503	99,9	2,8227	0,032255		
10	15	85	57,424	99,2	2,7433	0,031088	31,85	0,030517
11	7	93	59,455	99,1	2,8095	0,030782	32,0	0,030472
12	3,5	96,5	50,2271	99,9	2,4070	0,030966	32,1	0,030610
13	0	100	43,368	100	2,0862	0,031053	31,98	0,030657

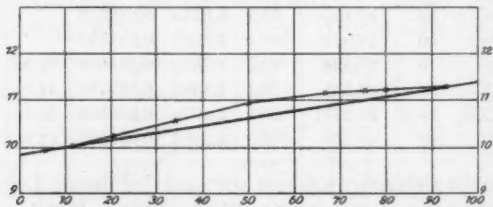
Es fragt sich nun: Können wir auch bei diesen Legierungen die Abweichungen durch die Richarzsche Regel erklären? Die Tabelle IV und die Kurve in Fig. 4 lehren, daß das spezifische Gewicht dieser Legierungen von der Mischungsregel zwar abweicht, aber in gerade entgegengesetzter Richtung, als es der Versuch einer Ausdehnung der Richarzschen Regel auf Legierungen verlangt hätte: der größeren spezifischen Wärme entspricht nämlich im vorliegenden Falle das größere spezifische Gewicht. Die Richarzsche Regel hat also für die Wismut-Bleilegierungen keine Geltung. Von zwei Bestimmungsreihen spricht also die eine für, die andere gegen die Richarzsche Regel; nach diesen Ergebnissen könnte man versucht sein, vorläufig den Schluß zu ziehen, daß die von Richarz gegebene Theorie fester Elemente auf Legie-

rungen nicht ausdehnbar ist. Dieser Schluß in solcher Allgemeinheit scheint mir indessen zum Schaden der genannten Theorie übereilt. Das negative Verhalten der Wismut-Bleilegierungen zur Richarzschen Theorie steht vielleicht in innerem Zusammenhange mit den auffallenden Anomalien, die dieselben Legierungen in ihrer spezifischen Wärme erkennen lassen: vielleicht haben beide Eigentümlichkeiten dieselbe Ursache.

Tabelle IV.

Das spezifische Gewicht der Wismut-Bleilegierungen.

Vol.-Prozent		Spezifisches Gewicht	Vol.-Prozent		Spezifisches Gewicht
Bi	Pb		Bi	Pb	
0	100	11,376	66,7	33,3	10,533
7,7	92,3	11,280	80,0	20,0	10,235
20,0	80,0	11,188	88,9	11,1	10,048
25,1	74,9	11,161	94,1	5,9	9,934
33,4	66,6	11,141	92,2	4,8	9,893
50,0	50,0	10,956	100	0	9,828



Zugabe von Pb zu Bi in Volumenprozenten.

Fig. 4.

Unter den Erklärungsversuchen, die im folgenden für die Anomalie der spezifischen Wärme der Wismut-Bleilegierungen gemacht werden, sprechen wir demjenigen einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu, der die Bildung von chemischen Verbindungen in den betreffenden Legierungen annimmt. Diese Annahme läßt meines Erachtens eine recht befriedigende Erklärung auch für das von der Richarzschen Regel abweichende Verhalten dieser Legierungen zu; denn während diese Regel auf der kinetischen Energie der Atome aufbaut, kann sie die bei chemischen

Verbindungen sich geltend machende *potentielle* Energie der intramolekularen Kräfte mangels genauer Kenntnis derselben nicht immer genügend berücksichtigen.

Wenn man also aus dem Verhalten der Wismut-Zinn- und Wismut-Bleilegierungen auch nichts Sicheres für die Gültigkeitsgrenzen der Richarzschen Regel bei Legierungen schließen kann, so berechtigen die angestellten Beobachtungen doch wenigstens zu der *vorläufigen Vermutung*, daß die *Richarzsche kinetische Theorie fester Elemente vielleicht auf Legierungen ohne chemische Verbindungen, nicht aber auf solche mit chemischer Verbindung der Komponenten ausgedehnt werden kann.*¹⁾

Suchen wir nun nach einer Erklärung für die auffallenden Anomalien der spezifischen Wärme der Wismut-Bleilegierungen, und zwar zunächst des *Minimums* der Kurve bei stark bleihaltigen Legierungen (Fig. 3).

Daß nicht etwa fehlerhafte kalorimetrische Messungen der Grund für diese Abweichungen waren, bestätigten mir die sofort an denselben Gußstücken angestellten zahlreichen Kontrollversuche. Zufällige Mischungsfehler waren wohl auch kaum zu vermuten; da sich die Werte der spezifischen Wärme sämtlicher Legierungen der zweiten Hälfte der Reihe systematisch zu diesem Minimum ordnen. Der Verdacht, daß beim Zusammenschmelzen der Metallmassen Verschiebungen in der prozentualen Teilnahme der Komponenten eingetreten seien, wofür mir zunächst die in den Schmelztiegeln verbleibenden, mit dem Bleigehalt wachsenden Rückstände der stark bleihaltigen Legierungen zu sprechen schienen, wurde völlig beseitigt durch das Ergebnis der quantitativen chemischen Analysen, die ich im Marburger Chemikalischen Institute an den hier besonders in Frage kommenden Legierungen vornehmen ließ. Diese ergaben nämlich genau die beim Gusse beabsichtigten Mischungsverhältnisse; so zeigt z. B. die Analyse der am meisten abweichenden Legierung, die auf 7 Proz. Bi mit 93 Proz. Pb berechnet war, einen Bi-Gehalt von 6,97 Proz., also nur 0,03 Proz. Unterschied an. Zwei weitere Analysen,

1) *Eutektische Mischungen* in den Legierungen spielen für die spezifische Wärme derselben und für die Anwendbarkeit der Richarzschen Regel offenbar dieselbe Rolle wie chemische Verbindungen. Vgl. hierzu den Schluß dieser Abhandlung p. 794.

und zwar der beiden Endteile desselben Gußstückes, zeigten 6,85 Proz. und 7,12 Proz. Bi an, also nahezu dasselbe Ergebnis. (Damit war zugleich auch eine Garantie für die *Homogenität* der nach meiner Gießmethode¹⁾ hergestellten Legierungen geboten.) In der Zusammensetzung der Legierungen konnte also diese Abweichung ihren Grund nicht haben.

Es erübrigt noch, die *Gießmethode* nach einem etwaigen Einfluß auf die spezifische Wärme der Legierungen zu untersuchen. — Beim Gießen der stark bleihaltigen Legierungen fiel es mir auf, daß der bereits erwähnte, im Tiegel bleibende Rückstand der Schmelzmasse, der mit Graphit eine feste, zusammengebackene Masse bildete, um so größer wurde, je länger und je höher ich die Schmelzmasse erhitzte; ich goß daher, und zwar zunächst die bezüglich ihrer spezifischen Wärme am meisten abweichende Legierung — 7 Proz. Bi mit 93 Proz. Pb mit der spezifischen Wärme 0,030782 — von neuem, aber so, daß ich die Schmelzmasse möglichst bald nach dem Flüssigwerden in die Form brachte. Mit diesem Guß erhielt ich die spezifische Wärme 0,030895 und durch einen Kontrollversuch mit demselben Gußstück 0,030896; unter sich sehr weit übereinstimmend, weichen diese beiden Werte von dem zuerst gefundenen beachtenswert ab, und zwar nähern sie sich dem berechneten Werte. Mit einem neuen und noch schneller nach dem Flüssigwerden der Komponenten ausgeführten Gusse desselben Mischungsverhältnisses erhielt ich den unseren ursprünglichen Erwartungen noch näher kommenden Wert von 0,031000. Eine Reihe anderer Versuche derselben Art hatten ähnliche Ergebnisse. Einige derselben sind im Kurvenbild (Fig. 3) durch Kreuzchen eingetragen. Danach scheint mir die spezifische Wärme von Legierungen abzuhängen von der *Höhe der Temperatur*, auf die der Schmelzfluß unmittelbar vor seiner Erstarrung erhitzt war. Da ich auch mißtrauisch gegen die Verwendung von Graphit zur Bedeckung der Schmelzmasse der stark bleihaltigen Legierungen geworden war, so stellte ich eine Mischung unter Kohlen-säuregas her; hierbei erhielt ich fast gar keinen Rückstand im Tiegel, und die beobachtete spezifische Wärme ließ auch kaum mehr etwas von einer Anomalie der besprochenen Art (Minimum) erkennen. Ich goß daher sämtliche Legierungen

1) O. Richter, Diss. Marburg 1908. p. 26.

dieser Reihe bis auf jene mit ganz geringem Bleigehalt von neuem unter Kohlensäuregas. An Stelle der Graphittiegel verwendete ich jetzt Schamottetiegel. Die sich nun ergebenden Werte, welche ich in diesen Annalen im vergangenen Jahre bereits mitteilte, lassen das Minimum bei stark bleihaltigen Legierungen so gut wie ganz verschwinden, halten aber bei im übrigen recht regelmäßigem Verlaufe der Kurve das Maximum, das bei den ersten Bestimmungen bei 45 Proz. Bi mit 55 Proz. Pb lag (vgl. p. 784 u. 794), in gleicher Höhe, jetzt aber bei dem Mischungsverhältnis 50 Proz. Bi mit 50 Proz. Pb bei; vgl. Tab. V und Fig. 5.

Tabelle V.

Die spezifische Wärme der Wismut-Bleilegierungen
(unter Kohlensäuregas geschmolzen).

Nr.	Gewichts- prozent		Gewicht in g	Temperatur	Korrigierte Quecksilber- aufnahme	Spezifische Wärme beobachtet	Spezifische Wärme berechnet
	Bi	Pb					
1	100	0	50,005	99,5	2,2879	0,029925	[0,029925]
2	96,5	3,5	43,240	99,2	2,0025	0,030152	0,029964
3	94	6	54,011	99,1	2,5096	0,030267	0,029992
4	91	9	41,698	99,6	1,9595	0,030457	0,030026
5	85	15	28,662	100,1	1,3679	0,030773	0,030093
6	60	40	57,373	99,8	2,8438	0,032069	0,030373
7	50	50	19,744	99,9	0,9936	0,032519	0,030485
8	40	60	28,950	99,9	1,4432	0,032213	0,030597
9	15	85	24,208	99,6	1,1785	0,031552	0,030877
10	7	93	29,210	99,8	1,4101	0,031226	0,030967
11	3,5	96,5	29,334	100,1	1,4217	0,031124	0,031006
12	0	100	55,031	99,0	2,6200	0,031045	[0,031045]

Der Frage, welches der Grund für die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme bei diesen Legierungen sei, ob es etwa die Dauer oder Höhe der Erhitzung der Schmelzmasse unmittelbar vor dem Gusse ist, oder die Geschwindigkeit, mit welcher die Schmelzmasse in der Form erstarrt, oder ob der verwendete Graphit oder irgend etwas anderes Einfluß habe, konnte ich experimentell nicht mehr in erwünschter Weise nachgehen. Ich *vermute* aber das Folgende: einen *direkten* Einfluß auf die Höhe der spezifischen Wärme übt der Graphit

wahrscheinlich nicht aus; dafür spricht ja auch das Ergebnis der chemischen Analyse, die keine Spur von Kohlenstoff in der Legierung ergab. Daß nun doch in so auffallender Weise bei Verwendung von Kohlensäure als Deckmittel für den Schmelzfluß die ganze Reihe der Werte für die spezifische Wärme sich änderte, scheint mir vielleicht auf folgende Art erklärbar zu sein: Wie ich bereits ausgeführt habe, näherte sich der Wert der spezifischen Wärme der Legierung 7 Proz. Bi mit 93 Proz. Pb um so mehr dem theoretisch berechneten

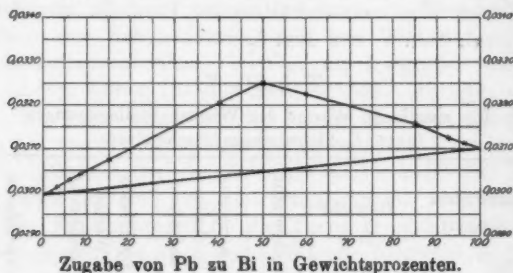


Fig. 5.

Die spezifische Wärme der Wismut-Bleilegierungen
(unter Kohlensäuregas geschmolzen).

Werte, je schneller ich die Legierung nach dem Flüssigwerden der Komponenten goß, und zwar auch schon bei der Verwendung von Graphitpulver als Deckmittel. Da man nun aber selbst bei guter Übung den Augenblick, in dem die Metallmassen vollständig geschmolzen und genügend gemischt sind, unter Graphit nicht sofort erkennen kann und den Tiegel daher meistens länger, als es nötig ist, erhitzt, da ferner die über dem Schmelzfluß lagernde Graphitschicht die Wärme in diesem festhält, so wird meistens der zum Guß zu verwendende Schmelzfluß eine höhere Temperatur haben, als es eben für die Erhaltung des flüssigen Zustandes der betreffenden Mischungsverhältnisse erforderlich wäre. Bei Verwendung von Kohlensäuregas als Schutzmittel gegen Oxydation aber können wir den Augenblick des Schmelzens und der hinlänglichen Durchmischung der Komponenten besser erkennen und den Guß viel schneller bewerkstelligen; die Temperatur des Schmelzflusses wird hier also nicht so hoch steigen, als es bei Verwendung einer Graphitdecke geschieht. Am wahr-

scheinlichsten erscheint es mir daher, daß die Höhe der Temperatur der Schmelzmasse unmittelbar vor dem Gusse von Einfluß auf die spezifische Wärme der Legierung ist; denn die durch die Höhe dieser Temperatur bedingte Höhe der Erhitzung der Gußform und die hiervon abhängige größere oder geringere Geschwindigkeit der Erstarrung der Legierung hat eine Verschiedenheit in der Molekularkonstitution der festen Masse zur Folge, die für die Beweglichkeit der Atome und daher für die spezifische Wärme des betreffenden Gußstückes mitbestimmend ist. Bei langsamer Erstarrung nämlich ist den Atomen Zeit gegeben, sich zu größeren Molekularkomplexen zu aggregieren; dadurch wird die Bewegungsfreiheit der einzelnen Atome geringer und damit die spezifische Wärme des betreffenden Körpers kleiner.

Nach den Anschauungen von F. Richarz¹⁾ sind die Veränderungen auch der magnetischen Eigentümlichkeiten (Hysteresis) Heuslerscher Legierungen zurückzuführen auf Veränderungen in der Molekularstruktur, die ihrerseits wieder bedingt sein können durch veränderte mechanische und besonders thermische Vorbehandlung der betreffenden Versuchsstücke. Es ließ sich daher vermuten, daß mit den Veränderungen der magnetischen Eigenschaften dieser Legierungen Veränderungen in der spezifischen Wärme derselben parallel gehen. Dieser Vermutung ging im Marburger Physikalischen Institute Herr E. Dippel²⁾ experimentell nach; seine Beobachtungen zeigen denn in der Tat auch in der Abhängigkeit der spezifischen Wärme und magnetischer Eigenschaften gewisser Legierungen von deren „thermischer Vorgeschichte“ („Abschrecken“ und künstliches „Altern“) einen Parallelismus, der eine starke Stütze ist für die erwähnten Anschauungen zunächst über den Grund dieser physikalischen Eigentümlichkeiten, sodann aber auch über die molekulare Struktur der betreffenden Legierungen überhaupt.

Wir sehen also, daß bestimmte physikalische Eigenschaften gewisser Legierungen nicht nur von deren Zusammensetzung, sondern auch von der Art des Gießens wie überhaupt von ihrer thermischen Vorgeschichte abhängig sind.

1) P. Asteroth, Diss. Marburg 1907.

2) E. Dippel, Diss. Marburg 1910; der Auszug dieser Dissertation erscheint demnächst in diesen Annalen.

Suchen wir nun nach einer Erklärung der anderen Anomalie der spezifischen Wärme der Wismut-Bleilegierungen, die in dem *Maximum* der Kurve veranschaulicht ist.

Im allgemeinen nimmt für feste Körper die spezifische Wärme zu mit steigender Temperatur. Man kann sich dies erklären durch die Annahme, daß je näher die Temperatur des untersuchten festen Körpers seinem Schmelzpunkte kommt, desto mehr von der zugeführten Wärme „latent“ wird, indem sie als Umwandlungswärme, die den Körper allmählich für das Flüssigwerden disponiert, ihn etwa weicher macht, verbraucht wird.¹⁾ Diese Vorstellung auf den vorliegenden Fall angewendet, müßten in unserer Bestimmungsreihe die Mischungsverhältnisse, deren spezifische Wärme dem Maximum der Kurve entspricht, eine Schmelztemperatur haben, welche unserer Beobachtungstemperatur (100°) näher liegt als die übrigen Mischungsverhältnisse.²⁾ Zur Prüfung dieser Auffassung führte ich noch eine zweite Bestimmungsreihe aus mit denselben Versuchssubstanzen, aber bei tieferer Temperatur. Ich ging dabei von dem Gedanken aus: Ist die Annäherung der von mir gewählten Versuchstemperatur — rund 100° — an die bei den betreffenden Mischungsverhältnissen niedriger liegende Schmelztemperatur der Grund für die anomale Höhe der spezifischen Wärme, so wird, wenn wir die Versuchstemperatur genügend und bei allen Legierungen um gleichviel niedriger nehmen als bei den ersten Versuchen, die spezifische Wärme bei allen Versuchsstücken zurückgehen, bei jenen Mischungsverhältnissen aber am stärksten, bei welchen sie sich am weitesten über den berechneten Wert erhob, beim Maximum der Kurve. — Die Resultate meiner Beobachtungen, für die ich eine Temperatur von 30 bis 32° wählte, sind in der letzten Kolumne der Tabelle III p. 785 angeführt und durch die Kurve *b* in Fig. 3 graphisch dargestellt.

Man erkennt zwar bei allen Legierungen einen Rückgang der spezifischen Wärme, nicht aber ist dieser Rückgang bei den Legierungen, die dem Maximum der Kurve entsprechen,

1) L. Schütz, Wied. Ann. 46. p. 177. 1892; W. Spring, Bull. An Belg. (3) 11. p. 355. 1886; V. Regnault, Winkelmans Handbuch, 2. Aufl. 3. p. 194.

2) Vgl. hierzu A. W. Kapp, Diss. Königsberg 1910; H. Landolt u. R. Börnstein, Physik-chem. Tab. 3. Aufl. p. 307.

größer als bei den übrigen Legierungen, und die Kurve wird nicht, wie man nach erwähnter Annahme hätte vermuten müssen, flacher, sondern sie behält ihre ursprüngliche Gestalt mit dem ausgeprägten Maximum so gut wie unverändert bei. Danach scheint also die Erhebung der beobachteten spezifischen Wärme über die berechnete in dem vorliegenden Falle wohl nicht in der niedrigen Lage des Schmelzpunktes der betreffenden Mischungsverhältnisse begründet zu sein.

Die bereits p. 786 angedeutete Auffassung, daß sich in der Legierung eine *chemische Verbindung* mit höherer spezifischer Wärme bildet, scheint manches für sich zu haben. Allerdings müßten wir dann, ungeachtet der verschiedenen Wertigkeit der beiden Komponenten, annehmen, daß in dieser Verbindung Wismut und Blei in gleicher Atomzahl vorkommen. Welches dann die wahre Konstitutionsformel — Bi_xPb_x — ist, muß noch dahingestellt bleiben.

Berücksichtigen wir dann, daß die Atomgewichte der beiden Komponenten, $\text{Bi} = 208,5$ und $\text{Pb} = 207$, fast gleich sind, so muß bei demjenigen Mischungsverhältnis die Verbindung am stärksten auftreten, für welches die Komponenten in gleichen Gewichtsmengen gemischt sind; denn bei diesen ist der Bedingung, daß sich möglichst viel Bi- und Pb-Atome zu Molekeln zusammenfinden können, am meisten entsprochen. Aus der korrigierten Kurve für die spezifische Wärme der Bi-Pb-Legierungen in Fig. 5 auf p. 790 kann man eine gute Bestätigung für diese Auffassung erkennen. Denn nehmen wir an, daß bei dem Mischungsverhältniss 50 Proz. Bi mit 50 Proz. Pb — genau 50,2 Proz. Bi mit 49,8 Proz. Pb — sämtliches Bi und Pb die Verbindung eingegangen sind, so würde 0,032519 die spezifische Wärme dieser Verbindung sein. Gehen wir nun von dieser Verbindung aus und mischen ihr nach und nach von 0 Proz. bis 100 Proz. Bi bzw. Pb bei, so erhalten wir für die spezifische Wärme dieser Gemische Werte, die auffallend genau der Mischungsregel entsprechen und durch die beiden vom Maximalpunkte unserer Kurve abfallenden Äste veranschaulicht sind; der linke Ast gilt dann für die Gemische der Wismut-Bleiverbindung mit Wismut, der rechte der Wismut-Bleiverbindung mit Blei. Das Maximum der Kurve entspricht dabei der spezifischen Wärme für die reine Wismut-Bleiverbindung.

Wie mir nachträglich zur Kenntnis kommt, sind andere Beobachter, so Bornemann¹⁾, Barlow und Kapp, sowie Mazatto und Sheppard auf Grund ihrer neueren Untersuchungen zwar nicht der Ansicht, daß sich in den BiPb-Legierungen bei ungefähr gleichen Atomverhältnissen von Bi und Pb eine chemische Verbindung bildet; sie nehmen aber, und zwar Mazatto und Sheppard bei 45 Proz. Bi mit 55 Proz. Pb²⁾, die Bildung eines Eutektikums in der Legierung an. Beachten wir, daß in einer eutektischen Mischung die Atome der Komponenten inniger aneinander gekettet sind als in einer gewöhnlichen Legierung, so ist es erklärlich, daß solche physikalische Eigenschaften, die vornehmlich auf der Molekularstruktur der Körper beruhen und sich mit dieser ändern, in einer Legierung mit einem Eutektikum andere Werte zeigen als in einer Legierung, in der man eine bloße Nebeneinanderlagerung der Atome der Komponenten nach Art eines mechanischen Gemenges annimmt. Man wird daher bei eutektischen Mischungen, deren beobachtete spezifische Wärme von derjenigen nach der Mischungsregel berechneten abweicht, ähnlich wie bei chemischen Verbindungen die Eigenart der Molekularstruktur zur Erklärung hierfür heranziehen dürfen. Damit wäre dann vielleicht zugleich auch eine Erklärung dafür gegeben, warum man die Vorstellungen, die F. Richarz seiner kinetischen Theorie fester Elemente zugrunde legt, nicht ohne weiteres auf eutektische Mischungen anwenden kann; diese Theorie baut nämlich, wie bereits erwähnt, auf der *kinetischen* Energie der Atome auf und kann die zwischen den Atomen wirkenden intramolekularen Kräfte bei komplizierterer Molekularstruktur nicht immer genügend berücksichtigen.

Die auf p. 787 ausgesprochene Vermutung über den Gültigkeitsbereich der Richarzschen Regel bei Legierungen wäre hiernach also dahin zu ergänzen, daß man sagt: *Die Richarzsche kinetische Theorie fester Elemente und die aus ihr gefolgerte*

1) W. Bornemann, Die binären Metalllegierungen. Halle a. S. (W. Knapp), Teil II, p. 105. 1912.

2) Es ist auffallend, daß genau bei denselben Mischungsverhältnissen in meiner *ersten* Bestimmungsreihe für die Bi-Pb-Legierungen das Maximum der spezifischen Wärme lag. Vgl. oben p. 784 u. 785.

Regel läßt sich vielleicht auf Legierungen ohne chemische Verbindung oder Eutektikum, nicht aber auf solche mit chemischer Verbindung oder Eutektikum ausdehnen.

Die experimentellen Beobachtungen zu vorstehenden Untersuchungen wurden im Marburger physikalischen Institute angestellt; dem Direktor desselben, Hrn. Prof. Dr. F. Richarz, spreche ich für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte, auch an dieser Stelle herzlichen Dank aus.

Marburg i. H., Physik. Inst. d. Universität.

[(Eingegangen 17. Juli 1913.)]

**6. Beweis der Unmöglichkeit ergodischer
Gassysteme;
von Artur Rosenthal.**

Der Boltzmann-Maxwellsche Aufbau der Gastheorie stützt sich, wie P. u. T. Ehrenfest in ihrem Encyklopädieartikel über statistische Mechanik¹⁾ in lichtvoller Weise ausinandergesetzt haben, wesentlich auf die Hypothese, daß *jedes Gas ein ergodisches System* darstellt. Ein solches System ist folgendermaßen definiert: ¹⁾ „Die einzelne ungestörte Bewegung des Systems führt bei unbegrenzter Fortsetzung schließlich *durch jeden Phasenpunkt hindurch*, der mit der mitgegebenen Totalenergie verträglich ist.“²⁾ Angesichts der Tatsache, daß kein Beispiel eines derartigen ergodischen Systems mit Sicherheit nachgewiesen ist, zweifeln P. u. T. Ehrenfest¹⁾ überhaupt an der *Existenz* ergodischer Systeme (d. h. an der Widerspruchslosigkeit ihrer Definition).

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß dieser Zweifel in der Tat berechtigt war; d. h. *es wird im folgenden bewiesen*, daß nicht nur *nicht jedes Gas ein ergodisches System ist*, sondern daß *überhaupt solche ergodische Gassysteme nicht existieren können*.³⁾

1) P. u. T. Ehrenfest, Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik, Encykl. d. math. Wiss. 4. 2 II, Heft 6; Nr. 10a.

2) Dabei ist der momentane Zustand eines Systems dargestellt durch einen Punkt des $2rN$ -dimensionalen Phasenraumes, wenn das Gas aus N Teilchen von je r Freiheitsgraden besteht. Übrigens wird vorausgesetzt, daß das äußere Kraftfeld sich im Verlaufe der Zeit nicht ändert; vgl. P. u. T. Ehrenfest, l. c., Nr. 9a u. b.

3) Die vorliegende Arbeit war schon redigiert, als ich aus einer Notiz in den Fortschr. d. Phys. ersah, daß die gleiche Materie auch den Gegenstand einer Mitteilung des Herrn Prof. M. Plancherel (Freiburg, Schweiz) auf der Berner Versammlung der Schweizer Phys. Gesellsch.

Der Gedankengang dieses Beweises wird folgender sein: Zunächst können auf der $(2rN - 1)$ -dimensionalen Energiefläche immer Stücke abgegrenzt werden, die sich umkehrbar eindeutig und stetig auf $(2rN - 1)$ -dimensionale „Würfel“ beziehen lassen (§ 1). Sodann kann mit Hilfe einer einfachen mengen-theoretischen Betrachtung gezeigt werden, daß bei einem ergodischen System die durch die Systemkurve erzeugte Abbildung der Energiefläche auf die Zeitgerade im Widerspruch steht mit der Eindeutigkeit der Aufeinanderfolge der physikalischen Erscheinungen, d. h. mit dem Kausalitätsprinzip (§ 2).

Bei diesem Beweis wird weder über Ausdehnung der Moleküle noch über die Art der Zusammenstöße irgend eine Annahme gemacht, so daß also alles seine Geltung behält, auch wenn bei endlicher Ausdehnung der Moleküle der Phasenraum durchlöchert ist, oder wenn bei den Zusammenstößen die Impulskoordinaten etwa sich sprungweise ändern.

Die Unmöglichkeit der ergodischen Systeme ist gleichbedeutend mit der Existenz voneinander verschiedener Bahnkurven auf jeder Energiefläche; unser Beweis liefert uns noch mehr, nämlich den Nachweis der Existenz von sogar *mehr als abzählbar vielen* verschiedenen Bahnkurven auf jeder Energiefläche.

§ 1.

Wir stellen, wie man dies gewöhnlich tut, ein Gas von N Teilchen mit je r Freiheitsgraden¹⁾ in eindeutiger Weise durch einen Punkt G eines $2rN$ -dimensionalen (linearen) Raumes (Phasenraum oder Γ -Raum) dar, wobei die Koordinaten dieses Γ -Raumes die generalisierten Koordinaten q , und die generalisierten Impulse p , aller Teilchen sind. Die Gesamtheit aller physikalisch überhaupt möglichen Punkte G des Γ -Raumes soll

(9. März 1912) gebildet hatte. Der Versammlungsbericht hierüber (Archives des Sc. phys. et nat. (4) 33. p. 254/55. 1912) enthält keinerlei Andeutung über das Beweisverfahren. Hr. Prof. Plancherel war jedoch so freundlich, mir brieflich in kurzen Zügen den Gedankengang seines Beweises mitzuteilen. Es zeigt sich dabei, daß seine Ideen sich zum Teil in ähnlicher Richtung bewegen, wie die meinigen, jedoch auch in wesentlichen Punkten davon verschieden sind.

1) Für das Folgende ist $rN > 1$ vorausgesetzt.

mit Γ' bezeichnet werden (der ausgefüllte Teil des Phasenraumes).¹⁾

Jedem Gas und seinem Bildpunkt G ist in eindeutig bestimmter Weise seine Energie E zugeordnet; die Gesamtheit aller Punkte G von Γ' , für welche die Energie einen konstanten Wert $E = C$ besitzt, heiße die „Energiefläche“ E'_C .

Durch Hinzunahme einer neuen (orthogonalen) Koordinate e zum Γ -Raum bilden wir nun einen $(2rN + 1)$ -dimensionalen (linearen) Raum, den wir B -Raum nennen wollen; in ihm habe der Γ -Raum die Koordinate $e = 0$. Im B -Raum ordnen wir jedem Punkt G von Γ' einen Punkt F zu, der in den Γ -Koordinaten mit G übereinstimmt, aber als e -Koordinate den Wert $E(G)$ der Energie von G besitzt. Es sei vorausgesetzt, daß die Energie E eine stetige Funktion der q und p ist. Dann ist die Gesamtheit $F(\Gamma')$ aller Punkte F ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild von Γ' . Wir schneiden nun $F(\Gamma')$ mit einem zu Γ parallelen $2rN$ -dimensionalen (linearen) Raum, dessen Gleichung im B -Raum

$$e = C$$

lautet. Dieser Schnitt werde mit F_C bezeichnet; seine Parallelprojektion (in Richtung e) auf den Γ -Raum ist gerade E'_C .

Nun wähle man auf E'_C einen Punkt G_1 von der Eigenschaft, daß G_1 nicht auf der Begrenzung von Γ' liegt und daß in G_1 sowie in seiner Umgebung die Geschwindigkeiten dq_i/dt der Teilchen und ihre Impulsänderungen dp_i/dt nicht nur existieren, eindeutig und endlich sind, sondern auch beim Übergang zu Nachbarsystemen stetig variieren. Solche Punkte gibt es auf jedem E'_C in unendlicher Menge. Sind insbesondere etwa die Teilchen endlich ausgedehnt, undurchdringlich und nichtdeformierbar oder ändern sich bei momentan wirkendem Zusammenstoß die Impulse sprunghaft, so hat man als G_1 einen Punkt zu wählen, in dessen System keine Zusammenstöße stattfinden und keine der Teilchen sich gegenseitig berühren. Derartige Punkte kann man in den genannten Fällen immer finden. Denn: hat man ein System²⁾ G_e von E'_C ,

1) Γ' braucht nicht mit Γ zusammenzufallen; sind z. B. die Moleküle von endlicher Ausdehnung und gegenseitig undurchdringlich, so wird Γ' Lücken aufweisen.

2) mit nicht verschwindender kinetischer Energie.

in dem eben Zusammenstöße oder Berührungen stattfinden, so entferne man die einander berührenden Teilchen um ein endliches, aber sehr kleines Stück voneinander, derart, daß hierdurch keine neue Berührung entsteht.¹⁾ Die hierbei hervorgerufene Änderung der potentiellen Energie kann man dadurch ausgleichen, daß man durch entsprechende Vergrößerung oder Verkleinerung der Geschwindigkeiten die kinetische Energie um den entgegengesetzten Betrag abändert.

Um einen solchen Punkt G_1 herum kann man im Γ -Raum eine endliche $2rN$ -dimensionale Umgebung K_1 abgrenzen, die aus lauter Punkten von gleicher Eigenschaft wie G_1 besteht. K_1 ist daher vollständig in Γ enthalten. Das den Punkten von K_1 entsprechende Stück von $F(\Gamma)$ sei mit $F(K_1)$ bezeichnet; $F(K_1)$ ist ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild von K_1 , ist also (wie K_1) $2rN$ -dimensional und von einfachem Zusammenhang.²⁾

Von allen Systemen, welche Punkten von K_1 entsprechen, wissen wir, daß die Geschwindigkeiten dq_s/dt der Teilchen und ihre Impulsänderungen dp_s/dt existieren, eindeutig, endlich und in ihrer Abhängigkeit von den q und p stetig sind. Nun sollen die kanonischen Gleichungen

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_s}; \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, rN)$$

gelten und daraus ergibt sich demnach, daß auch die sämtlichen ersten partiellen Ableitungen von E nach allen q_s und p_s für jeden Punkt von K_1 bez. von $F(K_1)$ existieren, eindeutig, endlich und stetig sind. Hieraus aber folgt gerade die eindeutige Existenz einer $2rN$ -dimensionalen Tangentialebene T_P in jedem Punkte P der $2rN$ -dimensionalen Hyperfläche $F(K_1)$.

In keinem dieser Punkte P kann die Tangentialebene die Neigung 0 haben, d. h. zu Γ parallel sein. Denn wäre dies der Fall, so müßten in diesem Punkt gleichzeitig alle ersten partiellen Ableitungen von E verschwinden; es müßten also in dem diesem Punkt entsprechenden System alle Geschwindig-

1) Bei einem Gas kann man dies immer bewirken.

2) Über die Erhaltung der Dimensionszahl und des Gebietes bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung vgl. L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 70. p. 161. 1911; 71. p. 305, 314. 1912; 72. p. 55. 1912.

keiten und alle Impulsänderungen verschwinden. Ein solches System würde im Laufe der Zeit überhaupt keine Veränderungen erfahren; es würde sich während aller Zeiten vollkommen starr verhalten. Einen solchen Zustand kann ein Gas niemals annehmen. Sollen aber unsere Gassysteme ergodisch sein, dann müßte jedes Gassystem gleicher Energie auch gerade in jenen zeitlich unveränderlichen Zustand hineingelangen.

Wir wissen also, daß dem auf E'_0 gelegenen Punkt G_1 in $F(K_1)$ ein Punkt P_1 entspricht, dessen Tangentialebene T_{P_1} zum Γ -Raum *nicht parallel* ist.¹⁾ Man kann demnach sicher eine der Koordinatenachsen des Γ -Raumes finden (sie sei mit a bezeichnet) von der Eigenschaft, das T_{P_1} nicht parallel zu ihr ist. T_{P_1} enthält daher keine Gerade der Richtung von a . Die zu a parallele und durch P_1 gehende Gerade a_{P_1} hat mit T_{P_1} nur den einzigen Punkt P_1 gemeinsam, wie überhaupt T_{P_1} von allen zu a parallelen Geraden genau in je einem einzigen Punkt getroffen wird.

Zunächst wollen wir nun zeigen, daß der zu P_1 benachbarte Teil von $F(K_1)$ in *nicht mehr als einem* Punkt von jeder zu a_{P_1} benachbarten Parallelen getroffen werden kann. Angenommen nämlich, es wäre nicht so; dann gäbe es eine gegen a_{P_1} konvergierende Folge von Parallelen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots$$

derart, daß auf jeder dieser Geraden a_i mindestens zwei Punkte von $F(K_1)$ (P'_i und P''_i) liegen, die mit wachsendem Index i gegen P_1 konvergieren. Nun lege man durch jede dieser Geraden a_i die gewöhnliche, zweidimensionale Ebene ε_i , die parallel zur Koordinatenachse e ist. ε_i schneidet aus $F(K_1)$, mit dem sie an sich die beiden Punkte P'_i und P''_i gemeinsam hat, eine stetige Kurve η_i aus (die von den zu e parallelen Geraden nur in je einem einzigen Punkt getroffen wird). η_i besitzt überall eine bestimmte Tangente; denn in jedem ihrer Punkte (wie überhaupt in jedem Punkt von $F(K_1)$) existiert eindeutig und endlich die partielle Ableitung $\partial E / \partial a$. Nach dem

1) Übrigens kann in keinem Punkt von $F(K_1)$ die Tangentialebene senkrecht zum Γ -Raum stehen. Denn in diesem Fall müßte mindestens eine der ersten Ableitungen von E dort unendlich werden, was nach dem obigen für alle Punkte von $F(K_1)$ ausgeschlossen ist.

Rolleschen Satz ist also in einem zwischen P'_i und P''_i gelegenen Punkt von η_i eine zu a_i parallele Tangente \bar{a}_i vorhanden. Dies gilt für jede Ebene ε_i . Da nun $\partial E/\partial a$ in der Nähe von P_1 stetig ist, so müßte die Grenzgerade a_{P_1} der \bar{a}_i selbst eine Tangente von $F(K_1)$ im Punkt P_1 sein, also in T_{P_1} liegen, was unserer Voraussetzung widersprechen würde. Man kann also um P_1 eine endliche, einfach zusammenhängende, $2rN$ -dimensionale Umgebung U auf $F(K_1)$ abgrenzen, derart, daß keine Gerade der Richtung a mit U mehr als einen Punkt gemeinsam hat.

Zieht man nun durch jeden Punkt von U eine Gerade der Richtung a , so ist die Gesamtheit V der von diesen Geraden auf T_{P_1} ausgeschnittenen Punkte das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild von U . Daher (vgl. Anm. 2, p. 799) ist V ein endliches, einfach zusammenhängendes, $2rN$ -dimensionales, P_1 enthaltendes Gebiet in T_{P_1} .

Man kann demnach in V einen endlichen, $2rN$ -dimensionalen „Würfel“ W annehmen, der P_1 umschließt und von dem ein $(2rN - 1)$ -dimensionaler „Begrenzungswürfel“ dem Schnitt von T_{P_1} mit dem Γ -Raum parallel ist. Das durch Projektion in Richtung a erzeugte eineindeutige, stetige Abbild von W in U ist ein P_1 umschließendes, $2rN$ -dimensionales Gebiet Y . Nun lege man durch P_1 die $2rN$ -dimensionale Parallelebene zum Γ -Raum, nämlich: $e = C$. Diese schneidet W in einem $(2rN - 1)$ -dimensionalen „Würfel“ S und sie schneidet Y in einem ebenfalls $(2rN - 1)$ -dimensionalen Gebiet R , das ein Stück von F_C ist und durch die in $(e = C)$ gelegenen Geraden der Richtung a umkehrbar eindeutig und stetig auf S abgebildet wird. S und R umschließen den Punkt P_1 . Projiziert man nun R parallel zur Koordinatenrichtung e auf den Γ -Raum, so erhält man hierdurch ein $(2rN - 1)$ -dimensionales Gebiet R' , welches ganz in E_C enthalten ist und den Punkt G_1 umschließt.¹⁾ Damit ist also die Existenz eines solchen Gebietes R' in unserer „Energiefläche“ E_C nachgewiesen, das umkehrbar eindeutig und stetig auf einen $(2rN - 1)$ -dimensionalen „Würfel“ S abbildbar ist.²⁾

1) Die Begrenzung von R' werde zu R' gerechnet.

2) Man wähle für das folgende S und R' nicht so groß als möglich, sondern so, daß S im Innern eines größeren derartigen „Würfels“ \bar{S} und

§ 2.

Hat man ein Gas, welches die Energie $E = C$ besitzt und behält, und also in jedem Zeitmoment durch einen auf E'_C gelegenen Punkt G dargestellt wird, so beschreibt der darstellende Punkt G im Laufe der Zeit eine gewisse Kurve \mathfrak{G} ¹⁾ auf E'_C . Der jeweilige Zustand des Gases ist vollständig durch die Kenntnis der generalisierten Koordinaten q , und Impulse p , bestimmt. Da nun die physikalischen Erscheinungen in eindeutig bestimmter Weise und zwar unabhängig von der Zeit aufeinanderfolgen (*Kausalitätsprinzip*), so ergibt sich, daß der darstellende Punkt G seine Bahn \mathfrak{G} in eindeutig bestimmter Weise durchläuft, und daß er, wenn er zu verschiedenen Zeiten die gleiche Lage annimmt, von da aus seine Bahn jedesmal in genau gleicher Weise fortsetzt. Es kann also niemals vorkommen, daß zwei voneinander verschiedene Stücke der Bahnkurve sich treffen. Die Bahnkurve \mathfrak{G} kann also *keine mehrfachen Punkte* aufweisen (sofern man sich bei rein periodischen Bahnen auf einen einzigen Umlauf beschränkt).

Die *Ergodenhypothese* fordert nun, daß der darstellende Punkt G des Systems *alle* Punkte der „Energiefläche“ E'_C , also *a fortiori alle* Punkte von R' durchläuft. Dadurch wird (mittels der Zuordnung von Bahnpunkten und Zeitmomenten) eine gewisse Abbildung von E'_C auf die Zeitgerade t und von R' (sowie von S) auf gewisse Teile der Zeitgeraden t bewirkt. Sicherlich ist nach dem vorhin Gesagten für *endliche* Werte von t die Abbildung \mathfrak{A} von R' (und von S) auf jene Teile der Zeitgeraden t *umkehrbar eindeutig* (wobei man sich bei einer rein periodischen Bahn auf einen einzigen vollen Umlauf zu beschränken hätte).

Für endliche, *beschränkte* Zeitabschnitte ist diese Abbildung \mathfrak{A} auch *umkehrbar stetig*. Denn: Sei

$$t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$$

demgemäß R' im Innern eines größeren gleichartigen Gebietes R'' enthalten sei (wobei die kleinste Entfernung η der Oberflächen von R' und R'' größer als Null sei).

1) Diese kann in Zeitmomenten, in denen im Gas gerade Zusammenstöße stattfinden, auch Sprünge aufweisen, wenn nämlich etwa bei Zusammenstößen Unstetigkeiten in den Impulsen auftreten. Die in R' bzw. R'' gelegenen Stücke von \mathfrak{G} sind jedoch alle stetig.

eine monotone Folge von Zeitmomenten, die sämtlich zwischen endlichen Schranken \bar{t} und \bar{t} eingeschlossen sind. Ihnen entspreche die Folge von in R' gelegenen Punkten:

$$P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$$

Dem Häufungswert t_ω der $\{t_i\}$, der auch dem Intervall $\bar{t} \dots \bar{t}$ angehört, sei ein gewisser Punkt P_ω zugeordnet. Angenommen nun, P_ω wäre außerhalb R' (vgl. Anm. 2, p. 801) gelegen; dann müßte G bei Annäherung an t_ω beliebig viele innerhalb R' gelegene Kurvenstück $\geq \eta$ (vgl. Anm. 2, p. 801) in beliebig kurzer Zeit durchlaufen, was unmöglich ist, da die Geschwindigkeit von G bzw. ihre Komponenten \dot{q}_s und \dot{p}_s in R' stetig, also beschränkt sind. Daher liegt P_ω in R' . Dann aber gehört t_ω einem Zeitintervall τ_ω an, dem ein stetiges, zusammenhängendes Kurvenstück c_ω in R' entspricht. Von einem gewissen i an müssen in τ_ω alle t_i und daher in c_ω alle P_i liegen. Also ist P_ω Häufungspunkt und zwar einziger Häufungspunkt der $\{P_i\}$. — Umgekehrt entspricht auch einem Häufungspunkt P_ω von $\{P_i\}$ ein Häufungswert von $\{t_i\}$, sofern nur die in Betracht kommenden Zeiten t_i zwischen endlichen Schranken liegen. Denn hebt man aus $\{P_i\}$ eine Teilmenge $\{P'_i\}$ heraus, welche P_ω als einzigen Häufungspunkt besitzt, so sind wegen des vorhergehenden und wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit der Beziehung der Häufungswert t'_ω von $\{t'_i\}$ und P_ω gegenseitig eindeutig zugeordnet.¹⁾

Unser Beweis wird nun darauf hinauslaufen, zu zeigen, daß die Abbildung \mathfrak{A} unmöglich ist.

Zunächst wäre es denkbar, daß die Kurve \mathfrak{C} von einer gewissen Zeit an R' nicht mehr verläßt, also für $t = \infty$ innerhalb R' irgendwie asymptotisch verläuft. In diesem Fall würden

1) Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß für endliche, aber nicht beschränkte Zeiten nur die einseitige Stetigkeit, dagegen nicht die umkehrbare Stetigkeit der Abbildung \mathfrak{A} behauptet werden kann. Denn: Benachbarten Zeitmomenten müssen zwar auch hier benachbarte Punkte von R' entsprechen, aber nicht umgekehrt. D. h. es entspricht zwar auch in diesem Falle jedem endlichen Häufungswert t_ω von $\{t_i\}$ der einzige Häufungspunkt der zugehörigen $\{P_i\}$; aber umgekehrt braucht hier einem Häufungspunkt P_ω einer in R' gelegenen Folge $\{P_i\}$ nicht ein Häufungswert der zugehörigen $\{t_i\}$ zu entsprechen.

wir R' in zwei Teilgebiete zerlegen; dann wird sicherlich in mindestens einem dieser Teilgebiete der darstellende Punkt für sehr große t sich nicht dauernd befinden. Wir können uns also von vornherein R' so gewählt denken, daß der darstellende Punkt nicht von einem gewissen Zeitpunkt an innerhalb R' bleibt, ohne R' dazwischen immer wieder zu verlassen.

Nun sind bei den ergodischen Systemen *drei Fälle* denkbar:

1. Es durchläuft die Bahnkurve \mathcal{C} nach ihrem Eintritt in R' sämtliche Punkte von R' während endlich beschränkter Zeit $(t_0 \dots t_1)$ in einem Zuge. Dann würde das $(2rN - 1)$ -dimensionale Gebiet R' umkehrbar eindeutig und stetig auf die eindimensionale Strecke $(t_0 \dots t_1)$ der Zeitgeraden abgebildet. Dies ist aber wegen der *Invarianz der Dimensionszahl*¹⁾ bei umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen *unmöglich* (wenn nur $(2rN - 1) > 1$ ist).

2. Die Bahnkurve \mathcal{C} durchläuft sämtliche Punkte von R' , aber nicht in einem Zuge, sondern sie tritt wiederholt, endlich oder unendlich oft, in R' ein; zwischen dem ersten Eintritt und dem letzten Austritt sei dabei ein *endlich-beschränktes* Zeitintervall $(t_0 \dots t_1)$ verstrichen. Dann würde das einfach zusammenhängende Gebiet R' auf nicht zusammenhängende Stücke des Intervalls $(t_0 \dots t_1)$ umkehrbar eindeutig und stetig abgebildet; was *unmöglich* ist schon wegen der *Invarianz des Zusammenhangs*²⁾ abgeschlossener Mengen bei umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildungen.

3. Die Bahnkurve \mathcal{C} tritt nach (bzw. vor) *beliebig langer Zeit* immer wieder in R' ein und aus R' aus, und sie durchläuft dabei schließlich sämtliche Punkte von R' . Dies ist (einem Poincaréschen Satz³⁾ zufolge) der physikalisch wichtige Fall, den man wohl auch bei Aufstellung der Ergodenhypothese im Auge hatte. Für diesen Fall aber versagt das

1) Vgl. die in Anm. 2, p. 799 an erster Stelle zitierte Arbeit von L. E. J. Brouwer; für den vorliegenden Fall genügen schon die sehr viel einfacheren Überlegungen, die von A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II, Jahresb. d. Dtsch. Math.-Ver., Ergänz.-Bd. 2. p. 165. 1908, angegeben sind.

2) A. Schoenflies, l. c. p. 153.

3) H. Poincaré, Acta math. 13. p. 69. 1890.

vorhergehende Schlußverfahren. Denn hier ist für $t = +\infty$ die Abbildung weder eindeutig noch stetig, sondern für $t = +\infty^{(-)}$ gibt es hier keine bestimmte Grenzlage. [Diese Unbestimmtheit ist physikalisch durchaus zulässig, da (aktuell) unendliche Zeit physikalisch gar keinen Sinn hat.] Und selbst bei Beschränkung auf die endlichen Zeiten ist die Abbildung jedenfalls nicht umkehrbar stetig (vgl. Anm. 1, p. 803); sondern benachbarten Punkten von R' entsprechen z. T. weit auseinanderliegende Zeitmomente.

Um auch diesen Fall 3 zu erledigen, beweisen wir (mit Hilfe der bereits erkannten Unmöglichkeit der Fälle 1 und 2 der Ergodenhypothese) eine ganz allgemein gültige Eigenschaft der in R' verlaufenden Teile der Bahnkurve eines Gassystems.

Jedesmal, wenn unsere Bahn \mathcal{C} in R' eindringt und daselbst auch innere Punkte annimmt, legt sie in R' ein Kurvenstück ϱ_i zurück und verweilt in R' während eines gewissen endlich beschränkten Zeitintervalls τ_i ; dadurch werden ϱ_i und τ_i umkehrbar eindeutig und stetig aufeinander abgebildet. Auf diese Weise erhält man eine Reihe von getrennt liegenden Intervallen τ_i und zugehörigen Kurvenstücken ϱ_i . Nun kann man nach einem Satz von G. Cantor¹⁾ auf einer Geraden nur höchstens eine abzählbare Menge von nicht übereinandergreifenden Intervallen angeben. Also können nur höchstens abzählbar viele Zeitintervalle τ_i und daher nur höchstens abzählbar viele solche Kurvenstücke ϱ_i existieren. Wir betrachten nun irgend eines dieser ϱ_i und bezeichnen es mit ϱ_I . Wir wissen nach Fall 1, daß ϱ_I nicht durch jeden Punkt von R' hindurchgehen kann. ϱ_I kann aber auch nicht einmal jedem Punkt von R' beliebig nahe kommen; denn sonst müßte ϱ_I , da es eine abgeschlossene Punktmenge ist, durch jeden Punkt von R' hindurchgehen. Es gibt also sicherlich einen Punkt $Q_{(I)}$ in R' derart, daß $Q_{(I)}$ von jedem Punkt von ϱ_I eine endliche, nicht verschwindende Entfernung besitzt, wobei die untere Grenze $q_{(I)}$ dieser Entfernungen von Null verschieden ist. Man kann deshalb um $Q_{(I)}$ eine $(2rN - 1)$ -dimensionale „Kugel“ mit dem Radius $q_{(I)}$ legen, derart, daß innerhalb

1) G. Cantor, Math. Ann. 20. p. 117. 1882.

dieser „Kugel“ sich kein Punkt von q_I befindet. Diese Punkte $Q_{(I)}$ mit den zugehörigen „Kugeln“ liegen außerdem überall dicht in R' . Denn andernfalls müßte es ein $(2rN - 1)$ -dimensionales Teilgebiet M' von R' geben, durch dessen sämtliche Punkte q_I hindurchgeht, was nach Fall 1 und 2 unmöglich ist. Also bilden die Punkte von q_I eine in R' nirgends dichte Menge. Daher wird nach der Definition von R. Baire die Gesamtheit der Punkte aller q_i , d. h. die Gesamtheit aller auf der Bahnkurve \mathcal{C} liegenden Punkte von R' eine Menge erster Kategorie¹⁾ in R' darstellen.

Nun ist aber nach R. Baire²⁾ das Kontinuum R' selbst eine Menge zweiter Kategorie in R' . Also kann auch in unserem Fall 3 die Bahnkurve \mathcal{C} nicht durch jeden Punkt von R' hindurchgehen.

Damit ist die Unmöglichkeit der ergodischen Gassysteme nachgewiesen.

Aus unserem Beweis folgt aber zugleich noch mehr: Wir haben allgemein gezeigt, daß die Gesamtheit aller von einer Bahnkurve \mathcal{C} in R' durchlaufenen Punkte daselbst eine Menge erster Kategorie bilden. Da (zufolge der Definition der Mengen erster Kategorie) abzählbar unendlich viele Mengen erster Kategorie zusammengenommen immer noch eine Menge erster Kategorie bilden, und da die Gesamtheit der Punkte von R' eine Menge zweiter Kategorie ist, so ergibt sich also noch weiter, daß mehr als abzählbar unendlich viele voneinander verschiedene Bahnkurven auf der Energiefläche E'_C existieren müssen, und daß in jedes (noch so kleine) $(2rN - 1)$ -dimensionale Gebiet von E'_C mehr als abzählbar viele voneinander verschiedene Bahnkurven eindringen; auf Grund einer ganz ähnlichen Betrachtung gilt dies auch noch für jedes Gebiet von E'_C , dessen Dimension größer als 1 ist.

München, im Mai 1913.

1) R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Paris 1905, p. 78 und 106. — Eine Menge erster Kategorie in einem Gebiet G ist eine Menge, die aus abzählbar vielen, in G nirgends dichten Mengen erzeugt werden kann. Jede Menge, die nicht von erster Kategorie in G ist, heißt dann eine Menge zweiter Kategorie in G .

2) R. Baire, l. c. p. 79 u. 106.

**7. Eine Theorie der Stoßionisation
und die Form der Funktion $\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{X}{p}\right)$;
von Bergen Davis.**

(A Theory of Ionization by Impact and the Form of the Function

$$\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{X}{p}\right).$$

Die Tatsache, daß durch den Zusammenstoß anderer Ionen mit den Molekülen eines Gases neue Ionen gebildet werden, ist zum ersten Male von J. S. Townsend¹⁾ bündig nachgewiesen worden. Ferner ist erwiesen worden, daß zwischen der Anzahl neuer Ionen, dem Druck und der elektrischen Feldstärke eine ganz grundlegende Beziehung besteht. Es hat sich ergeben, daß man für alle Werte der elektrischen Feldstärke und des Gasdruckes die nachstehende Funktionsgleichung experimentell erhält, nämlich

$$\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{X}{p}\right).$$

In dieser Gleichung ist α gleich der Anzahl neuer Ionen, die ein Ion bei seiner Bewegung durch ein Gas unter einem Druck p auf einen Zentimeter erzeugt, wenn es von einer elektrischen Feldstärke X getrieben wird.

Es ist bislang kein Versuch gemacht worden, die Form dieser Funktion auf Grund theoretischer Erwägungen zu entwickeln. Ich möchte nun nachweisen, daß sich diese Funktion mit Leichtigkeit durch eine Erweiterung einer Theorie der Stoßionisation ausdrücken läßt, die ich vor ein paar Jahren entwickelt habe.²⁾

Der Grundgedanke, der dieser Theorie zugrunde liegt, besteht in der Annahme eines kugelförmigen Moleküls und in

1) Nature, 9. Aug. 1900. — Phil. Mag., Febr. 1900.

2) Phys. Rev., Jan. 1907.

der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Chance dafür, daß ein Ion es unter direktem oder unter streifendem Stoße trifft. Während ein Ion in einem Gase fortschreitet, in dem es Zusammenstöße mit den Molekülen vollführt, kann es ein Molekül zentral so treffen, daß es seine ganze kinetische Energie einbüßt; oder es kann das Molekül unter einem Winkel gegen dessen Oberfläche treffen, und in diesem Falle wird das Ion von dem Molekül reflektiert werden und nur einen Teil seiner kinetischen Energie einbüßen.

Dieser Ionisierungsvorgang wird durch folgende kurze Entwicklung leicht verständlich werden. Wir wollen ein Gas betrachten, durch das sich ein von der elektrischen Feldstärke X getriebenes Ion bewegt. Es möge α die Anzahl der ionisierenden Zusammenstöße sein, die das Ion beim Durchlaufen eines Zentimeters vollführt, und l sei die mittlere freie Weglänge des Ions. Die Anzahl der Zusammenstöße aller Art, die das Ion in einem Zentimeter vollführt, wird $1/l$ sein.

Es sei λ_0 die kürzeste Bahn, die Ionisation zustande bringen kann. Dann drückt nach der kinetischen Gastheorie die Gleichung

$$n = \frac{1}{l} e^{-\frac{\lambda_0}{l}}$$

aus, wie viele Bahnen größer sind als λ_0 . Aber nicht alle Bahnen, die größer sind als λ_0 , werden notwendig eine Ionisation zur Folge haben, denn die Erzeugung neuer Ionen wird sowohl von der Natur des Stoßes als auch von der Länge der Bahn abhängig sein. Einige der Stöße werden normal zur Oberfläche des Moleküls erfolgen, während die Ionen in vielen anderen Fällen unter streifendem Stoß aufprallen werden. Die Anzahl der wirklich ionisierenden Stöße wird

$$(1) \quad \alpha = \frac{1}{l} e^{-\frac{\lambda_0 + x}{l}} (f)$$

sein, wo x irgendeine zu λ_0 hinzukommende Strecke ist, und wo (f) der Bruchteil der $(\lambda_0 + x)$ an Größe übertreffenden Strecken ist, der eine Ionisation zur Folge hat.

Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß ein Molekül Kugelgestalt habe, und wollen erwägen, daß eine Ionisierung dann erfolgen wird, wenn die von der normalen

Geschwindigkeitskomponente des aufprallenden Ions herrührende Energie der minimalen Ionisierungsenergie $w = Xe\lambda_0$ gleich ist, oder sie übertrifft. Das Ion muß sich, wenn es das Molekül trifft, innerhalb des Zylinders $ABCD$ (siehe Fig. 1) bewegen. Die mit dem Mittelpunkte in einer Linie liegende Bahn λ_0 hat die Eigenschaft, daß das Ion unter dem Antriebe seitens der Feldstärke X gerade ein anderes Ion durch Stoß erzeugt. Die Bahn λ_0 ist die kürzeste mögliche Bahn, die zu einer Ionisation führen kann, und $X\lambda_0$ ist die kleinstmögliche Ionisierungsspannung. Wenn sich das Ion auf irgendeiner anderen Bahn bewegt, wie beispielsweise längs gh , so muß die Länge von gh größer sein als λ_0 . Die Normalkomponente der Geschwindigkeit bei h muß so groß sein, daß die von dieser Normalkomponente herrührende Energie, wenn sie ein neues Ion erzeugen soll, gleich $Xe\lambda_0$ oder größer als $Xe\lambda_0$ ist. Die wirkliche Energie ist $Xe(\lambda_0 + x)$, wo x eine zu λ_0 noch hinzukommende Strecke ist.

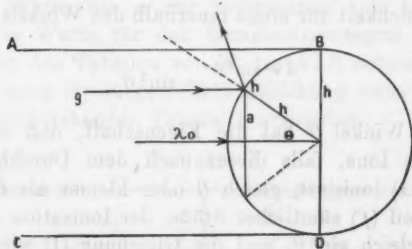


Fig. 1.

Es sei v die tatsächliche Geschwindigkeit des Ions am Ende der Bahn $(\lambda_0 + x)$; die Normalkomponente seiner Geschwindigkeit wird dann

$$v_n = v \cos \theta$$

sein. Die von der Normalkomponente der Geschwindigkeit herrührende Energie wird

$$(2) \quad \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{2} m v^2 \cos^2 \theta$$

sein. Nun ist aber

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = X e \lambda_0$$

und

$$\frac{1}{2} m v^2 = X e (\lambda_0 + x),$$

mithin

$$X e \lambda_0 = X e (\lambda_0 + x) \cos^2 \theta.$$

Hieraus folgt:

$$(3) \quad \sin^2 \theta = \frac{x}{\lambda_0 + x}.$$

Falls das Ion überhaupt einen Stoß ausübt, muß es innerhalb des Zylinders $ABCD$ auftreffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es innerhalb eines beliebigen Winkels θ auftritt, ist gleich dem Verhältnis zwischen der Grundfläche des Zylinders auf einem von dem Winkel θ umfaßten Segmente und der Grundfläche des großen Zylinders. Die Grundfläche des kleinen Zylinders ist $\pi a^2 = \pi r^2 \sin^2 \theta$, und die Grundfläche des großen Zylinders ist πr^2 . Mithin ist die Wahrscheinlichkeit für einen innerhalb des Winkels θ erfolgenden Stoßes:

$$\frac{\pi r^2 \sin^2 \theta}{\pi r^2} = \sin^2 \theta.$$

Dieser Winkel θ hat die Eigenschaft, daß der Einfallswinkel eines Ions, falls dieses nach dem Durchlaufen einer Bahn $(\lambda_0 + x)$ ionisiert, gleich θ oder kleiner als θ sein muß. Der Bruchteil (f) sämtlicher Stöße, der Ionisation herbeiführt, ist mithin gleich $\sin^2 \theta$, und die Gleichung (1) wird zu

$$(4) \quad \alpha = \frac{1}{l} e^{-\frac{\lambda_0 + x}{l}} \sin^2 \theta.$$

Setzen wir den Wert aus Gleichung (3) ein, so wird

$$(5) \quad \alpha = \frac{1}{l} e^{-\frac{\lambda_0 + x}{l}} \cdot \frac{x}{\lambda_0 + x}.$$

Wenn das Ion eine Strecke dx über eine Bahn $(\lambda_0 + x)$ hinaus durchläuft, wird die Anzahl ionisierender Zusammenstöße

$$\frac{1}{l} e^{-\frac{\lambda_0 + x}{l}} \cdot \frac{x}{\lambda_0 + x} \cdot \frac{dx}{l}$$

sein.

Die Anzahl ionisierender Stöße, die ein Ion beim Durchlaufen eines Zentimeters ausführt, wird

$$(6) \quad a = \frac{1}{l} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda_0 + x}{l}} \cdot \frac{x}{\lambda_0 + x} \cdot \frac{dx}{l}$$

sein.

Dieser Ausdruck läßt sich nicht in endlichen Gliedern integrieren; de Haan¹⁾ hat ihn aber in folgender Form angegeben:

$$(7) \quad a = \frac{1}{l} e^{-\frac{\lambda_0}{l}} \cdot \left[1 + \frac{\lambda_0}{l} e^{\frac{\lambda_0}{l}} \cdot Ei\left(-\frac{\lambda_0}{l}\right) \right].$$

Dieser Ausdruck läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$(8) \quad \alpha l = e^{-\frac{\lambda_0}{l}} + \frac{\lambda_0}{l} Ei\left(-\frac{\lambda_0}{l}\right).$$

Dies ist die Endgleichung, die wir auf die experimentell gefundenen Werte von α zur Bestimmung von λ_0 anwenden können. Die Werte für das Exponentialintegral $Ei(-\lambda_0/l)$ habe ich aus den Tabellen von W. Laska²⁾ entnommen. Die durch Gleichung (8) ausgedrückte Beziehung zwischen αl und λ_0/l ist in nachstehender Tabelle I angegeben:

Tabelle I.

$\frac{\lambda_0}{l}$	αl	$\frac{\lambda_0}{l}$	αl
0,04	0,8563	1,5	0,0731
0,06	0,804	2,0	0,0375
0,1	0,7247	3,0	0,0106
0,14	0,656	4,0	0,0032
0,2	0,574	5,0	0,00099
0,25	0,518	6,0	0,00032
0,3	0,496	7,0	0,000142
0,4	0,3893	8,0	0,000034
0,6	0,2762	9,0	0,0000114
0,8	0,2008	10,0	0,00000387
1,0	0,1485		

1) Bierens de Haan, Verk., K. Akad. V.-W. Dl. H, blad 19.

2) W. Laska, Sammlung von Formeln.

Man kann die Gleichung (8) praktisch in der Weise anwenden, daß man die vorstehende Tabelle in großem Maßstabe durch eine Kurve darstellt, in der die Abszissen die Werte von λ_0/l und die Ordinaten die zugehörigen Werte von αl wiedergeben.

Die Probe auf die Gültigkeit dieser Theorie besteht darin, daß sie für alle Drucke und für alle elektrischen Feldstärken konstante Werte von $X\lambda_0$ liefern muß.

Herr E. S. Bishop¹⁾ hat kürzlich einige Bestimmungen von α in Gasen unter ziemlich hohem Druck ausgeführt und gefunden, daß das Produkt $X\lambda_0$, das er unter Anwendung der Gleichung (8) aus seinen Versuchen erhält, eine Konstante ist. Diese Gleichung enthält außer λ_0 und α die Größe l , welche die mittlere freie Weglänge eines Ions in dem Gase bei dem betrachteten Drucke darstellt. Der Wert, den er l beilegte, war $l = 4\sqrt{2}$ mal der mittleren freien Weglänge eines Moleküls bei dem gegebenen Druck. Das Ion scheint in diesem Fall ein Elektron zu sein. Es ist sehr klein im Vergleich zu einem Molekül; infolgedessen muß seine mittlere freie Weglänge 4mal so groß sein wie die eines Moleküls. Ferner bewegt es sich mit einer Geschwindigkeit von höherer Größenordnung als die eines Moleküls, so daß sich seine Weglänge aus diesem Grunde auf das $\sqrt{2}$ -fache erhöhen wird. Infolgedessen wird die mittlere freie Weglänge bei jedem beliebigen Drucke $4\sqrt{2}$ mal so groß sein wie die eines Moleküls.

In der nachstehenden Tabelle II sind die Ergebnisse der Bishopschen Bestimmung von $X\lambda_0$ für Wasserstoff, Kohlensäure und Luft bei verschiedenen Drucken angegeben.

Die kleinste Ionisierungsspannung $v = X\lambda_0$ ist für jedes Gas eine vom Druck und von der elektrischen Feldstärke unabhängige Konstante. Folglich stellt für den obigen Druckbereich die Gleichung (8) die tatsächliche Beziehung zwischen α , l und λ_0 mit enger Annäherung dar.

Setzen wir $v = X\lambda_0$, drücken wir den Druck in Zentimetern Hg aus, und setzen wir L = der mittleren freien Weglänge eines Ions unter Normaldruck, so geht Gleichung (8) ohne weiteres in folgenden Ausdruck über:

1) Phys. Rev., Nov. 1911.

$$(9) \quad \frac{\alpha}{p} = \frac{1}{76L} \left[e^{-\frac{v}{76L} \frac{p}{X}} + \frac{v}{76L} \frac{p}{X} Ei \left(-\frac{v}{76L} \frac{p}{X} \right) \right].$$

Dies ist die endgültige Form der Gleichung und bringt die Form der Funktion

$$\frac{\alpha}{p} = f \left(\frac{X}{p} \right)$$

zum Ausdruck.

Tabelle II.

Wasserstoff		Kohlensäure		Luft	
Druck in cm	$X\lambda_0$	Druck in cm	$X\lambda_0$	Druck in cm	$X\lambda_0$
1,0	9,67	1,0	6,44	2,64	10,20
1,9	9,59	3,53	6,28	4,92	10,22
4,0	9,64	5,0	6,17	5,27	10,18
5,0	9,68	6,05	6,16	10,00	10,22
10,0	9,72	10,0	6,21		
20,0	9,68				
30,0	9,67				
40,0	9,64				
Mittelwert: 9,66 Volt		Mittelwert: 6,25 Volt		Mittelwert: 10,2 Volt	

Es ist vielleicht der Mühe wert, einige Folgerungen zu betrachten, die sich ergeben, wenn Gleichung (9) der wahre Ausdruck für den Zusammenhang zwischen α , p und X ist.

a) Die einzigen Werte für l in Gleichung (8), für die $X\lambda_0$ eine Konstante wird, sind $l =$ dem $4\sqrt{2}$ -fachen der mittleren freien Weglänge eines Moleküls. Das negative Ion ist ein Elektron, zum mindesten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen und unter dem Antrieb seitens hoher elektrischer Feldstärken.

b) Die hier entwickelte Theorie nimmt ein kugelförmiges Molekül an. Es ist in hohem Maße unwahrscheinlich, daß ein Molekül wirklich kugelförmig ist, zumal in zweiatomigen Gasen. Das negative Elektron gelangt wahrscheinlich niemals zu tatsächlicher Berührung mit dem Molekül. Es nähert sich ihm vielmehr bis auf einen solchen Abstand, daß sein elektrisches Feld abstoßend auf die Elektronen des Moleküls wirkt. In ähnlicher Weise wirken die Felder der Elektronen in dem Molekül

auf das sich nähernde Elektron in dem Sinne, daß sie Abstoßung und Reflektion hervorrufen. Es scheint, daß das resultierende elektrische Feld der vielen Elektronen in dem Molekül eine annähernd kugelförmige Verteilung hat. Auf diese Weise werden die von dieser Theorie geforderten Bedingungen mit enger Annäherung erfüllt.

Phoenix Physical Laboratory, Columbia University,
im Juni 1913.

(Eingegangen 4. August 1913.)

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé)

8. J
Sp

mach
Emis
teilig
der
schau
tions
isolie

wobe
Eigen
dram
Stell

r' un
also,
nur r
auf s
mäßi
unive

denen
müsse

p. 112

8. Einige Bemerkungen über das Verhalten von Spektrallinien mit Trabanten im Magnetfeld; von W. Voigt.

1. Die Elektronentheorie der Absorption und Dispersion macht die Intensität einer Absorptions- (und daher auch einer Emissions-) Linie abhängig von der Anzahl N der bei ihr beteiligten Elektronen in der Volumeneinheit und von der Größe der gegen die Elektronen ausgeübten Dämpfungskraft, die anschaulich in der Halbwertbreite ν' und in der maximalen Absorptionsstärke $n\kappa$ zur Geltung kommt. Das Gesetz für $n\kappa$ bei einem isolierten Absorptionsstreifen läßt sich nämlich schreiben¹⁾

$$n\kappa = \frac{2\pi N e^2 \nu'}{m n_0 \nu_0 (4\mu^2 + \nu'^2)},$$

wobei e die Ladung, m die träge Masse des Elektrons, ν_0 seine Eigenfrequenz bezeichnet, n_0 der Brechungsindex des Mediums ohne den bezüglichen Absorptionsstreifen ist, und μ die Stelle im Absorptionsstreifen relativ zu ν_0 bestimmt.

Es mag bemerkt werden, daß der Integralwert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n\kappa d\mu = \frac{\pi^2 N e^2}{m n_0 \nu_0}$$

ν' und somit die dämpfende Kraft gar nicht enthält. Wenn also, wie in den sehr zahlreichen Fällen, die Beobachtung sich nur auf diese Gesamtabsorption (oder -emission) bezieht, so ist auf sie nur der Quotient $N e^2 / m n_0 \nu_0$, oder aber, wenn ν_0 nur mäßig variiert, n_0 merklich gleich Eins ist, und e wie m als universell gilt, nur die Elektronenzahl N von Einfluß.

Mehrere Spektrallinien, die gleich vielfältig sind, bei denen also je die gleiche Anzahl von Elektronen beteiligt ist, müssen hiernach dieselbe Gesamtstärke haben. Dabei können

1) Vgl. z. B. W. Voigt, Magneto- u. Elektrooptik, Leipzig 1908. p. 112.

sie immerhin in dem speziellen Falle, daß ihre Halbwertsbreiten sehr verschieden sind, ein sehr verschiedenes Aussehen bieten. Die wesentlich *breitere* Linie wird erheblich *matter* erscheinen, ja in Extremfällen sich nur als eine zarte diffuse Bande darstellen, die weit weniger ins Auge fällt, als der Gefährte mit kleinerer Breite. Im allgemeinen sind aber anscheinend die Halbwertsbreiten der Liniensysteme, die man als zusammengehörig betrachtet, nicht sehr wesentlich voneinander verschieden. Wenn dann von einem Paar die eine Linie beträchtlich intensiver ist, als die andere, vielleicht sogar bei *größerer* Halbwertsbreite, so folgt daraus, daß bei ihnen verschiedene Elektronen beteiligt sind.

Ein einfaches Beispiel liefern die Duplets vom Typ der *D*-Linien, wo für die stärkere Linie (D_2) durch die kompliziertere Art der magnetischen Zerlegung die Beteiligung einer größeren (der doppelten) Elektronenzahl auch direkt anschaulich gemacht wird. Hier hat sich durch die Annahme einer zyklisch-gleichen Koppelung von je drei Elektronen, von denen eines auf D_1 und zwei auf D_2 entfallen, die ganze Fülle der bisher wahrgenommenen magneto-optischen Erscheinungen im wesentlichen erklären lassen.¹⁾

Ganz anders liegen offenbar die Verhältnisse bei denjenigen Liniensystemen, die man gewöhnlich als „Hauptlinien mit Trabanten“ bezeichnet, und bei denen *die Stärke der einen Linie weit diejenigen der übrigen übertrifft, ohne daß aber die Beteiligung einer größeren Anzahl von Elektronen an ihr in dem Zeemaneffekt zum Ausdruck kommt.* (Vielleicht kann diese Formulierung eine erwünschte Definition für Hauptlinien mit Trabanten bieten.) Typisch einfache Fälle kommen im Heliumspektrum vor, wo mehrfach Systeme aus einer Hauptlinie und Trabanten beobachtet sind, deren Hauptlinien oder aber auch alle Glieder im Magnetfelde nach Triplets aufspalten.

Angeregt durch einige neuerdings im hiesigen Institut ausgeführten Beobachtungen, die ich unten besprechen werde, will ich im folgenden an einfachsten Beispielen zeigen, wie die Koppelungstheorie derartige Fälle auffassen läßt, und wie aus dieser Auffassung merkwürdige und wiederholt beobachtete

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 41. p. 403; 42. p. 210. 1913.

Formen des Zeemaneffektes sich unmittelbar erklären. Nach dem oben Gesagten ist klar, daß man sich bei Linien mit Trabanten in dem einfachsten Falle, daß beide nach Triplets aufspalten, eine größere Zahl gleichartiger, aber untereinander magnetisch *nicht* gekoppelter Elektronen für die Hauptlinien mit einer kleineren Zahl oder auch mit nur einem Elektron für jeden Trabanten gekoppelt zu denken hat. Damit ist sofort das allgemeine Schema für die Behandlung derartiger Fälle festgestellt. Die Bezeichnungen wähle ich weiterhin übereinstimmend mit den in den oben zitierten Arbeiten benutzten.

2. Ich betrachte hier nur den Fall, daß α untereinander nicht gekoppelter gleichartiger Elektronen (1) mit *einem einzigen* Elektron (2) gekoppelt sind.

Für die p -Schwingungen ($\parallel z$) gelten dann die Grundformeln

$$(1) \quad \begin{cases} p_1 z_1^{(a)} + i v h_{12} z_2 = e Z, & a = 1, 2, \dots, \alpha \\ p_2 z_2 + i v h_{21} \sum z_1^{(a)} = e Z, & h_{12} + h_{21} = 0, \\ p_j = h_j + i v f_j - m v^2, & v_j^2 = h_j / m. \end{cases}$$

Die A sind dem Felde proportional.

Da nach diesen Formeln alle $z_1^{(a)}$ untereinander gleich sind, kann man das System auch schreiben

$$(2) \quad \begin{cases} p_1 \alpha z_1 + i v \alpha h_{12} z_2 = \alpha e Z, \\ p_2 z_2 + i v \alpha h_{21} z_1 = e Z. \end{cases}$$

In dieser Form gestattet es die Deutung, daß ein einziges schwingungsfähiges Gebilde (1) die Ladung αe , die träge Masse αm trägt, einer quasi elastischen und einer Dämpfungskraft mit den Parametern αh_1 und αf_1 unterliegt und durch die Koppelungsfunktion $\alpha h_{12} = -\alpha h_{21}$ mit dem *einelektronigen* Gebilde (2) verknüpft ist. Möglicherweise sagt diese Interpretation mehr zu, als die ursprüngliche.

Die Formeln (1) resp. (2) beruhen auf der (Drudeschen) Annahme einer mit der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfungskraft, die ich als die einfachste beibehalte, wenn sie gleich unter Umständen durch die Beobachtung nicht genau bestätigt wird.

Sind in der Volumeneinheit N Aggregate von $\alpha + 1$ derartig gekoppelten Elektronen vorhanden, und wird die Wirkung

anderer Elektronenarten ignoriert, so ergibt sich für den komplexen Brechungsindex n_p die Formel

$$(3) \quad n_p^2 - 1 = 4\pi N e^2 \frac{p_1 + \alpha p_2}{p_1 p_2 - \alpha v^2 h_{12}^2}.$$

Ohne Feldwirkung, d. h. bei $h_{12} = 0$, gibt die Formel zwei Absorptionsstreifen bei den Eigenfrequenzen ν_1 und ν_2 mit Gesamtstärken im Verhältnis $\alpha:1$.

Durch Partialbruchzerlegung folgt aus (3)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} n_p^2 - 1 &= 2\pi N e^2 \left\{ \frac{(1+\alpha) - (1-\alpha)d/t}{s+t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)d/t}{s-t} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$p_1 + p_2 = 2s, \quad p_1 - p_2 = 2d, \quad d^2 + \alpha v^2 h_{12}^2 = t^2.$$

Die Formeln drücken eine mit Intensitätsänderung verbundene Verschiebung der beiden Absorptionslinien ohne Zerlegung aus.

Sind die Halbwertbreiten $f_j/m = \nu_j'$ der feldlosen Linien klein und so wenig verschieden, daß $\nu(f_1' - f_2')$ als klein neben $h_1 - h_2$ zu betrachten ist, dann kann man den Ort der Linien im Felde bestimmen durch die Bedingungen, daß der resp. reelle Teil von $s \pm t$ verschwindet, d. h. durch

$$(5) \quad v^2 = \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha v^2 \nu_{12}^2},$$

wobei $h_{12}/m = \nu_{12}$ gesetzt ist.

Bei kleinen Feldstärken gibt dies

$$(6) \quad v^2 = \nu_1^2 + \frac{\alpha \nu_1^2 \nu_{12}^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} \quad \text{und} \quad v^2 = \nu_2^2 - \frac{\alpha \nu_2^2 \nu_{12}^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2},$$

bei extrem großen

$$(7) \quad v^2 = \nu_0^2 \pm \nu_0 \nu_{12} \sqrt{\alpha},$$

wobei

$$\nu_0^2 = \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Wegen der Kleinheit der Unterschiede aller ν_h kann man dabei praktisch $\nu = \nu_h + \mu_h$ für $h = 1, 2, 0$ setzen und μ_h^2 neben ν_h^2 vernachlässigen.

Die Linien stoßen sich also durch die Feldwirkung gegenseitig ab und entfernen sich nach einem hyperbolischen Gesetz, anfangs proportional zum Quadrat der Feldstärke von den feldlosen Lagen, später proportional mit der Feldstärke selbst von der mittleren Frequenz ν_0 .

Die Gesamtstärken der beiden Linien werden durch die Zähler der Quotienten in (4) gemessen. Die Zähler beginnen mit den Werten 2α und 2, sie enden mit den Werten $1 + \alpha$ und $1 + \alpha$. Bei wachsendem Feld nimmt also der Trabant auf Kosten der Hauptlinie an Stärke zu und wird in extremen Feldern jener gleich.

3. Erscheinungen, die den vorstehend aus den Formeln abgeleiteten entsprechen, sind wiederholt beobachtet und dann nicht selten dahin beschrieben worden, daß neben der Hauptlinie im Felde ein Trabant „entsteht“, der sich mit wachsendem Felde von diesem entfernt, während er zugleich an Stärke zunimmt.

Beobachtungen, die, wie es scheint, nach Einfachheit besonders hierher gehören, hat unlängst im hiesigen Institut Hr. Richter an gewissen Chromlinien angestellt. Die Linie 3209,31 erscheint feldlos *einfach*; bei Erregung eines Feldes von wachsender Stärke löst sich aus ihr, nach Rot hin, ein äußerst schwacher Trabant ab. Hauptlinie und Trabant zerlegen sich in Triplets. Die p -Komponente des Trabanten nimmt bei Steigerung der Feldstärke ungemein stark an Intensität zu und besitzt bei 30 000 Gauss mehr als ein Drittel der Intensität der Hauptlinie. Hauptlinie und Trabant verschieben sich nach entgegengesetzten Seiten; oberhalb 10 000 Gauss wächst ihr Abstand merklich proportional mit dem Felde. Das Verhalten entspricht ganz einem beträchtlichen Wert von α in den obigen Formeln.

Die Linien Cr 3379,51 und 3379,96 zerfallen im Felde gleichfalls in Duplets; ihre Intensitäten verhalten sich merklich wie 1:2, es ist für sie also nach unserer Auffassung $\alpha = 2$ anzunehmen. Diesem kleinen α und dem relativ großen Anfangsabstand entsprechend ist die Verschiebung der beiden p -Komponenten durch das Feld sehr klein, dabei übrigens symmetrisch im Sinne einer Abstoßung. Die Änderung der relativen Intensität ist wegen ihrer Kleinheit nicht sicher nachweisbar. Auch dies entspricht den Folgerungen aus der Theorie, nach der bei gegen $(\nu_1^2 - \nu_2^2)$ kleinem $\alpha \nu \nu_{12}$ die Intensitätsänderung sehr klein sein soll.¹⁾

1) Ob andere nahegelegene Linien in beiden Fällen an dem Vorgang ein wenig teilnehmen, war nicht unzweifelhaft festzustellen.

Manche andere Beobachtungen betreffen vermutlich kompliziertere Gebilde. Wenn nämlich die p -Komponente der Hauptlinie bei wachsendem Felde ihren Platz bewahrt, während der Trabant sich merklich verschiebt, so ist diese Erscheinung mit den obigen einfachsten Annahmen nicht vereinbar. Wohl aber kann sie eintreten, wenn der Hauptlinie *beiderseits* ein Trabant angelagert ist. Solche Systeme sind u. a. bei verschiedenen Heliumlinien, deren Hauptlinie im Felde ruht, wirklich nachgewiesen worden.¹⁾ Ob dabei der eine Trabant beträchtlich stärker ist als der andere, ändert an dem theoretischen Resultat nichts. In den obigen Formeln für die Bewegung der Komponenten kommt z. B. die Zahl α nur (symmetrisch) in die Koppelungsfunktion h_{12} multipliziert vor; sie veranlaßt somit keinerlei geometrische Dissymmetrie. Ähnliches gilt auch bei komplizierteren Systemen. Wirken bei der Hauptlinie α , bei den Trabanten β und γ Elektronen mit, so kann die p -Komponente der Hauptlinie ruhen, wie verschieden auch β von γ sein mögen. Ich will die bezüglichlichen Rechnungen hier nicht mitteilen und nur bemerken, daß auch in dem Falle der beiderseitigen Trabanten deren Verschiebung anfänglich dem Quadrate der Feldstärken, später der Feldstärke selbst proportional verläuft. Hr. Wali-Mohammad²⁾ hat bei Cd 4800 ein solches Verhalten mit Sicherheit nachgewiesen.

Wird eine p -Komponente von Hauptlinie oder Trabant durch das Magnetfeld zerlegt, so sind für die bezüglichliche Linie gekoppelte Elektronen heranzuziehen, was dann sogleich zu sehr starken Komplikationen führt. Ich gehe auf solche Fälle (wie schon gesagt) hier nicht ein.

4. Im vorstehenden ist allein der Fall behandelt, daß der Unterschied der Halbwertsbreite der beiden Spektrallinien klein ist gegen ihren Abstand. Wie seltsame abweichende Erscheinungen eintreten können, wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, mag an dem entgegengesetzten Grenzfall erläutert werden, daß der Abstand der beiden Linien gegen den Unterschied der Halbwertsbreiten vernachlässigt werden kann.

1) W. Lohmann, Phys. Zeitschr. 9. p. 145. 1908; F. Paschen u. E. Back, Ann. d. Phys. 39. p. 897. 1912.

2) Wali-Mohammad, Göttinger Dissert. 1912; Ann. d. Phys. 39. p. 286. 1912.

Hier ist $2d = i\nu(f_1 - f_2)$ und somit bei $h_1 + h_2 = 2k_0$

$$(8) \quad \frac{d}{t} = \frac{i(f_1 - f_2)}{\sqrt{4\alpha h_{12}^2 - (f_1 - f_2)^2}},$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} s \pm t &= k_0 + \frac{1}{2}i\nu(f_1 + f_2) - m\nu^2 \\ &\pm \frac{1}{2}\nu\sqrt{4\alpha h_{12}^2 - (f_1 - f_2)^2} \end{aligned} \right.$$

Man sieht aus letzterer Formel, daß für kleine Felder (d. h. kleine h_{12}) die Wurzelgröße (also t) rein imaginär ist, die Feldwirkung also auf eine bloße scheinbare Veränderung der Dämpfungsparameter f_1 und f_2 herauskommt, somit keine Trennung der Absorptionslinie zur Folge hat. Zugleich ändern sich, da d/t reell ist, die Zähler der Quotienten in (4) in dem Sinne der Variation der Stärken beider Linien.

Mit wachsendem Felde erreicht t , resp. die Wurzel, den Wert Null und geht durch ihn zu reellen Werten über. Von da ab verbindet sie sich in (9) mit k_0 , d. h., die Feldwirkung hat nunmehr eine Trennung der beiden bisher merklich zusammenfallenden Spektrallinien zur Folge.

Im Bereiche dieses Überganges findet das Eigenartige statt, daß die Partialbruchzerlegung in (4), die in den früheren Fällen die Existenz zweier Absorptionslinien ausdrückte, zeitweilig ihre Bedeutung ganz verliert. Für

$$(\alpha + 1)t \leq (\alpha - 1)d$$

wird nämlich der Zähler des zweiten Quotienten negativ, und ein Absorptionsstreifen mit negativer Stärke ist eben kein Absorptionsstreifen. Für $t = 0$ wird ferner der erste Zähler gleich $+\infty$, der zweite gleich $-\infty$, und hier versagt die frühere physikalische Deutung in beiden Gliedern; ebenso ist sie im weiteren, wo bei reellem t die Zähler komplex werden, zu modifizieren.

Die Schwierigkeit verschwindet glatt, wenn $\alpha = 1$ ist, wenn also die beiden ursprünglich zusammenfallenden Linien auf der gleichen Zahl Elektronen beruhen. Hier wird (4) zu

$$(10) \quad n_p^2 - 1 = 4\pi N e^2 \left\{ \frac{1}{s+t} + \frac{1}{s-t} \right\}$$

$$s \pm t = k_0 + \frac{1}{2}i\nu(f_1 + f_2) - m\nu^2 \pm \frac{1}{2}\nu\sqrt{4h_{12}^2 - (f_1 - f_2)^2}.$$

Für kleine Felder, d. h. $0 < 4h_{12}^2 < (f_1 - f_2)^2$, beschränkt sich hiernach die magnetische Wirkung auf den Ausgleich der

Halbwertbreiten zwischen den beiden Spektrallinien; erst mit $4h_{12}^2 = (f_1 - f_2)^2$ setzt die Aufspaltung ein, die wie in dem früheren Fall nach einem hyperbolischen Gesetz mit der Feldstärke wächst.

Es mag hervorgehoben werden, daß in dem ersteren Intervalle auch die wahrnehmbare maximale Stärke πx der (kombinierten) Absorptionslinie variiert; sie beginnt mit

$$2\pi \frac{Ne^2}{n_0 \nu_0} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right)$$

und endet mit

$$2\pi \frac{Ne^2}{n_0 \nu_0} \frac{4}{f_1 f_2}.$$

Die Änderung verläuft im Sinne einer *Abnahme* die sehr merklich sein kann. Für $f_1 = 1$, $f_2 = 10$ ist das Verhältnis nahe gleich 3:1.

Spektrallinien, die im Magnetfelde diffus wurden und verblaßten, sind ab und zu beobachtet worden. Vorstehendes zeigt, wie man einen derartigen Vorgang verstehen kann; er tritt ein, wenn eine scharfe mit einer breiten an gleicher Stelle liegenden Linie gekoppelt ist.¹⁾

In dem allgemeinen Falle eines von Eins verschiedenen α muß die Diskussion an die unzerlegte Formel (4) angeknüpft werden und ist recht umständlich. Bestehen bleibt auch hier, daß bei kleinen Feldern die Absorptionslinie nur ihre Intensitätsverteilung ändert und erst bei stärkeren aufzuspalten beginnt.

5. Für die s -Schwingungen lauten die Grundgleichungen bei $x \pm iy = \zeta$, $X \pm iY = Z$

$$(11) \quad \begin{cases} p_1 \zeta_1^{(\alpha)} + i\nu h_{12} \zeta_2 = eZ, & \alpha = 1, 2, \dots, \alpha; \\ p_2 \zeta_2 + i\nu h_{21} \sum \zeta_1^{(\alpha)} = eZ, \\ h_{12} = f_{12} \mp i g_{12}, & h_{21} = -f_{12} \mp i g_{12}, \\ p_j = h_j + i\nu(f_j \mp i g_j) - m\nu^2; \end{cases}$$

dabei sind f_{12} , g_{12} , g_j mit der Feldstärke proportional; g_1 , g_2 messen die direkte Wirkung des Feldes auf die Elektronen (1) und (2).

1) Es mag bemerkt werden, daß die beginnende Zerlegung der diffus gewordenen Linie natürlich weiter in demselben Sinne wirkt.

Hier gilt, wenn nur die Wirkung der beiden Arten Elektronen (1) und (2) in Rechnung gesetzt wird, für den komplexen Brechungsindex n , die angenäherte Formel

$$(12) \quad n_s^2 - 1 = 2\pi N e^2 S \frac{p_1 + \alpha p_2 \mp 2\nu \alpha g_{12}}{p_1 p_2 - \alpha \nu^2 r_{12}^2}$$

bei $r_{12}^2 = f_{12}^2 - g_{12}^2$. Die Summe S bezieht sich auf die beiden Glieder mit den verschiedenen angedeuteten Vorzeichen.

Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} n_s^2 - 1 &= \pi N e^2 S \left\{ \frac{(1 + \alpha) - [(1 - \alpha) d \mp \nu \alpha g_{12}]/t}{s - t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 + \alpha) + [(1 - \alpha) d \mp \nu \alpha g_{12}]/t}{s - t} \right\}, \\ p_1 + p_2 &= 2s, \quad p_1 - p_2 = 2d, \quad d^2 + \alpha \nu^2 r_{12}^2 = t^2. \end{aligned} \right.$$

Wegen

$$2d = k_1 - k_2 \pm \nu(g_1 - g_2) + i\nu(f_1 - f_2)$$

ist die Diskussion dieser Formel im allgemeinen recht umständlich. In dem einfachsten Falle, daß sowohl merklich $f_1 = f_2$, als $g_1 = g_2$, d. h., daß die Halbwertsbreiten und die magnetische Aufspaltung der beiden ungekoppelten Linien sich nur wenig unterscheiden, liegen die Komponenten der Zerlegung bei Frequenzen gegeben durch

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu^2 &= \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2) \pm \frac{1}{2}\nu(\nu_{10} + \nu_{20}) \\ &(\pm) \frac{1}{2} \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha \nu^2 \nu_{12}^2}, \end{aligned} \right.$$

wobei

$$\frac{g_j}{m} = \nu_{j0} \quad \text{und} \quad \frac{r_{12}}{m} = \nu_{12}$$

gesetzt ist. Das Vorzeichen \pm ist dasjenige, auf welches sich die Summe S bezieht, (\pm) entspricht den beiden Quotienten in (13).

Man erkennt, daß für kleine Feldstärken (Vernachlässigung des zweiten Gliedes unter dem Wurzelzeichen) jede Linie in ein symmetrisches Duplet aufspaltet, während bei sehr großen Feldstärken (Vernachlässigung des ersten Gliedes unter dem Wurzelzeichen) ein zur mittleren Frequenz $\nu_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2)}$ symmetrisches Quadruplet entsteht.

Was die Stärken der Komponenten angeht, so sind bei kleinen Feldern die Summen von den Stärken der Komponenten

von (1) und (2) je ebenso durch 2α und 2 gemessen, wie außerhalb des Feldes; die Einzelstärken der Komponenten jeder Linie sind aber verschieden und zwar so, daß je nach dem Vorzeichen von g_{13} entweder die einander abgewandten oder die einander zugewandten die stärkeren sind. Die Differenz der bez. Stärken wird für beide Linien durch $2\alpha g_{13}/d$ gemessen. Sie ist also um so kleiner, je weiter die feldlosen Linien voneinander liegen, überdies für die schwächere Linie *relativ* größer.

In der Tat hat Hr. Richter bei den Chromlinien 3379,51 und 3379,96 — über die schon oben gesprochen ist — gefunden, daß bei beiden Linien die einander abgewandten Komponenten die schwächeren sind, und daß deren Verhältnis zu der bez. zugewandten Komponente bei der absolut schwächeren Linie mehr von Eins abweicht, als bei der stärkeren, endlich daß die Stärken der Komponenten derselben Linie bereits bei Feldern sehr merklich voneinander abweichen, bei denen die Summen der Stärken für beide Komponenten derselben Linien merklich noch den Wert der Stärke der feldlosen Linie haben.

Dies gibt also eine weitere Bestätigung der Formeln.

Ich bemerke ausdrücklich, daß irgendwelche zahlenmäßige Annahmen über die Parameter im ganzen Laufe der Untersuchung nicht gemacht worden sind, die Resultate also volle Allgemeinheit besitzen.

Göttingen, August 1913.

(Eingegangen 20. August 1913.)

9. Untersuchungen im äußersten Ultraviolett; von Karl Wolff.

(Hierzu Taf. XIII.)

I. Einleitung.

Im Jahre 1911 veröffentlichte Hr. Prof. Paschen eine Arbeit¹⁾ über die Seriengesetze in den Spektren Zink, Cadmium und Quecksilber. Hier berechnet er aus einer Hauptserie $2,5 S-mP$ die Wellenlängen einer, im Bogenspektrum obiger Elemente voraussichtlich sehr stark ausgeprägten „eigentlichen Hauptserie“ $1,5 S-mP$ einfacher Linien, welche im äußersten Ultraviolett verläuft. In einer späteren Ergänzung²⁾ zu dieser Abhandlung gibt Hr. Prof. Paschen dann eine weitere, bedeutend schwächere Kombinationsserie einfacher Linien, an, deren einzelne Glieder als den Gliedern der Hauptserie vorgelagert betrachtet werden können.

Es war nun nach zwei Richtungen hin von Wichtigkeit, zu erfahren, ob diese Serien wirklich unter entsprechenden Bedingungen im Bogen auftreten, und wie sie sich der Intensität nach verhalten: erstens für die Serientheorie und zweitens für die Schaffung von Normalwellenlängen im äußersten Ultraviolett. Wenn die Linien sich wirklich realisieren lassen, so hat man durch sie, da ihre Wellenlängen bis 0,01 AE. sicher sind, Standards im Gebiete der Schumannstrahlen, mit Hilfe derer die Messungen von Lyman³⁾ über das Wasserstoffspektrum kontrolliert und berichtigt werden können.

Wohl ist bei Quecksilber die Grundlinie $\lambda = 1849,60$ der Hauptserie von Handke⁴⁾ im Luftbogen zu $\lambda = 1850,0$ und von Lyman⁵⁾ bei Verunreinigung der Geißleröhre durch

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 35. p. 860. 1911.

2) F. Paschen, Ann. d. Phys. 40. p. 602. 1913.

3) Th. Lyman, Astrophys. Journ. 19. p. 203. 1904.

4) F. Handke, Untersuchungen im Gebiet der Schumannstrahlen. Berliner Dissert. 1909.

5) Th. Lyman, Astrophys. Journ. p. 106. März 1911.

Hg-Dampf mit $\lambda = 1849,6$ gemessen, sonst liegen aber außer den Funkenlinien von Zink, die Handke bis $\lambda = 1632$ mißt, keine weiteren Untersuchungen über diese Metalle in diesem Gebiet vor. Schumann¹⁾ hat die Funkenspektren nur photographiert, nicht gemessen. Da die gesuchten Linien im Flaschenfunken, selbst wenn Selbstinduktion im Schwingungskreis liegt, nicht einmal angedeutet erscheinen, so darf mit Sicherheit angenommen werden, daß dieselben bis jetzt noch unbekannt sind.

Durch vorliegende Arbeit soll nun der Beweis erbracht werden, daß diese vorhergesagten Linien wirklich, und zwar äußerst stark ausgebildet sind, und die Lymanischen Wasserstoffmessungen einer Kontrolle unterzogen werden.

II. Versuchsanordnung.

An Spektrographen standen zur Verfügung:

1. ein Vakuumprismenspektrograph mit Fluoritoptik nach V. Schumann,
2. ein Vakuumgitterapparat mit Fluorit-Biegungsgitter nach Kurlbaum.

Der Gitterapparat ist derselbe, mit welchem H. Morris-Airy²⁾ die Wellenlängen einiger Aluminiumlinien gemessen hat. Seine Resultate entsprachen jedoch keinesfalls der Wirklichkeit, wie spätere Untersuchungen von Handke³⁾ und Lyman⁴⁾ bewiesen haben. Die Abweichungen mögen wohl auf mangelhafte Justierung des Apparates zurückzuführen sein, da Verfasser bei einer orientierenden Bestimmung der Aluminiumlinie, die Handke und Lyman zu $\lambda = 1671,05$ bzw. $1670,6$ angeben, den Wert 1670 erhielt. Da das Arbeiten mit diesem Apparat sich jedoch äußerst schwierig und langwierig gestaltet, und die Genauigkeit wegen der kleinen Dispersion sehr zu wünschen übrig läßt, wurden die eigentlichen Messungen mit dem in dieser Beziehung weit vorteilhafteren, und dazu noch bedeutend lichtstärkeren Prismenapparat ausgeführt.

Der Prismenspektrograph, von R. Fuess in Berlin-Steglitz

1) V. Schumann, Wiener Anzeiger p. 24. 1895.

2) H. Morris-Airy, Proc. Manch. Soc. 49. p. 1—9. 1904/05.

3) F. Handke, l. c.

4) Th. Lyman, Astrophys. Journ. 35. p. 341. 1912.

hergestellt und von C. Leiss¹⁾ beschrieben, besitzt zwei Linsen aus wasserhellem Flußspat mit einer Brennweite von 150 mm für Natriumlicht und 16 mm Öffnung, sowie ein 60° Fluoritprisma von Zeiss.

Ein weiterer Satz Linsen mit einer Fokaldistanz von 122 mm für Na-Licht gestattete bei den verschiedenen Fokussierungen immer die günstigste Kombination auszuwählen, d. h. die Kameralinse immer möglichst nahe am Prisma zu lassen.

Eine besondere Schwierigkeit bot das Dichten des ganzen Apparates. Obwohl die Schliffflächen tadellos in Ordnung waren, wollte es anfangs nicht gelingen, den Apparat bis auf Röntgenvakuum zu bringen. Durch systematische Untersuchungen stellte sich dann heraus, daß der Fehler hauptsächlich an der schlechten Beschaffenheit des zum Hauptkonus verwandten Bronzegusses lag. Dieses Gußstück wies, wie auch der Kameratubus, zahlreiche, äußerst feine Gußporen auf, die nur durch Auskochen des ganzen Apparates in flüssigem Paraffin unter gleichzeitigem Evakuieren geschlossen werden konnten. Hierdurch war der Apparat jedoch sehr empfindlich gegen starke Temperaturschwankungen, da sich die Paraffinpfpfropfen dann wohl infolge ungleicher Wärmeausdehnung lockerten. Nur vollständiges Auseinandernehmen des Apparates und frisches Auskochen konnte den Übelstand beheben.

Zum Fetten der großen Konen erwies sich nach verschiedenen Proben Travers Gummifett²⁾ als vorzüglich geeignet, wenn als Gummi reiner, entsandeter Rohgummi (von Metzeler-München) verwandt wurde. Mit diesem Fett blieben die Schliffflächen stets dicht, und hauptsächlich immer leicht beweglich. Ein Zersetzen des Fettes, wie solches bei gewöhnlichem weißen Luftpumpenfett auf Metallflächen eintritt, konnte nicht festgestellt werden.

Zum Evakuieren des Apparates diente ein Luftpumpenaggregat nach Dr. Gaede. Der Grad der Luftverdünnung wurde an einem an die Luftpumpenleitung angeblasenen Geißlerrohr beobachtet. Der Apparat wurde stets so weit evakuiert, bis die Geißleröhre keine Entladung mehr zeigte. Als Verbindungen

1) C. Leiss, Zeitschr. f. Instrumentenk. p. 357. Dezember 1897.

2) Travers, Experim. Untersuchungen v. Gasen p. 24. 1905.

zwischen Apparat und Luftpumpe waren nur Glasröhren verwandt, die entweder zusammengeblasen oder mit Schliffen verbunden wurden.

Wenn die Feuchtigkeit im Apparat durch Phosphor-pentoxyd genügend absorbiert war, und keine allzugroßen Temperaturschwankungen eintraten, gelang es, den Apparat wochenlang auf vollständiger Dunkelentladung zu halten.

Justiert wurde der Apparat nach den Angaben von Schumann, vom fluoreszenzerregenden Teil des Aluminiumspektrums ausgehend. Zu diesem Zweck wurde an Stelle der Kamera ein Rohrstutzen an den Kameratubus angeschraubt, der unter einer Neigung von ca. 25° zur Rohrachse eine aufgekittete Glasplatte trug, die auf der Innenseite mit Willemit bestäubt war. Es zeigte sich, daß Willemit sehr kräftig bis $\lambda = 1743$ fluoresziert. Die Abmessungen des Rohrstutzens waren so getroffen, daß Willemitschicht und die Schicht der photographischen Platte in der Kamera von der Kameralinse gleichen Abstand hatten. Nach Evakuieren des Spektrographen erfolgte dann die Scharfstellung nach dem Fluorezsenzbild auf der Willemitplatte. Die endgültige Feinfokussierung geschah auf photographischem Wege. Vom $\lambda = 1670$ ab erfolgte die Justierung nur photographisch mittels Wasserstoff-Geißlerröhre. Die Einstellungen der Linsen, Kamerastellung und Plattenneigung wurden vor jeder Aufnahme zu Meßzwecken durch einige Fokussierungsaufnahmen kontrolliert und nötigenfalls berichtigt.

Als Lichtquelle dienten bei der Untersuchung von Zink und Cadmium Quarzglas-Bogenlampen *A* (Fig. 1) nach Stark und Küch¹⁾ von W. C. Heraeus-Hanau.

Dieselben hatten ein seitliches Beobachtungsrohr *b* von 10 cm Länge und waren unter Zwischenschaltung einer Geradsicht-Geißlerröhre mit dem Spaltverschlußdeckel *k* luftdicht verkittet. Abgeschlossen wurde das Ganze gegen den Spektrographen hin durch ein Fluoritfenster *f*. Die Geißlerröhre *a* diente als Vergleichslichtquelle zur Erzeugung des Schumannschen Wasserstoffspektrums. Sie besaß Zylinderelektroden *ee* und eine kurze Kapillare *c*. Die lichte Weite der Kapillaren

1) Stark und Küch, Phys. Zeitschr. 6. p. 488. 1905.

war so gewählt, daß das Lichtbündel, das von der Leuchtröhre der Lampe kommt, durch dieselbe keine Einschnürung erfährt. Zur Kondensation der sich entwickelnden Metaldämpfe war das Rohr *b* von einem Kühlmantel *d* umgeben, der von kaltem Wasser durchströmt wurde. Zur Regulierung der Belichtungszeit, und um zu verhindern, daß beim Einbrennen der Lampe mit starkem Strom, Metaldämpfe in die Geißleröhre und an das Fluoritfenster gelangen, war in die Röhre *b* eine Klappe *g* aus Eisenblech eingesetzt, welche von außen durch einen Elektromagneten geöffnet oder geschlossen werden konnte.

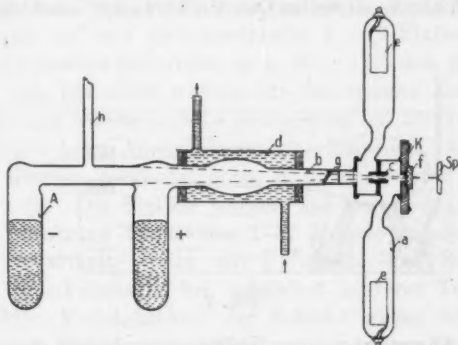


Fig. 1.

Lampe und Geißleröhre waren so auf den Spaltverschlußdeckel *k* aufgekittet, daß ein Zentrierstift, der in die Bohrung des Deckels paßte, die Kapillare *c* der Geißleröhre, die Öffnung der Klappe *g* und die Leuchtröhre der Lampe *A* genau zentrisch durchsetzte, so daß volle Lichtausbeute gewährleistet war. Durch die zentrische Bearbeitung des Deckels *k* auf der Drehbank, fiel dann die Mittellinie der Leuchtröhre von selbst in die optische Achse des Kollimators.

Das Ganze stand mittels der Ansatzröhre *h* der Lampe mit der Pumpe und dem Wasserstoff-Entwickelapparat in Verbindung.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch aus ausgekochter, chemisch reiner, verdünnter Schwefelsäure bei möglichst schwachem Strom entwickelt, und im Vorratsgefäß über Phosphor-pentoxyd getrocknet.

Wenn der Aluminiumfunken als Vergleichslichtquelle benötigt wurde, so wurde die Beobachtungsröhre *b* durch eine Quarzplatte verschlossen, und ein anderer Spaltdeckel, der ebenfalls eine Quarzplatte als Verschuß trug, vorgesetzt. So konnte dann zwischen Lampe und Spaltverschlußdeckel ein Aluminiumfunken eingeschoben werden.

Zur Erzeugung des Quecksilberspektrums wurden zuerst Versuche an Geißlerröhren mit Quecksilberelektroden unternommen, welche aber zu keinem Erfolg führten, da die Lichtintensität zu gering war und das Verschlußfenster sehr bald durch sich kondensierenden Quecksilberdampf beschlagen wurde.

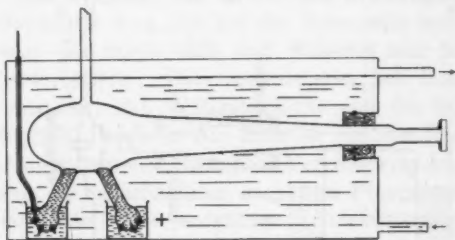


Fig. 2.

Die Anwendung einer Vakuumbogenlampe aus Glas mit Wasserkühlung (Fig. 2) beseitigte diese Übelstände, da der Quecksilberdampf auf dem langen Wege vom Bogen bis zum Fenster vollständig kondensiert wurde, und dann vermöge der konischen Form der Lampe als Tropfen wieder in die Polgefäße zurückrollte. Mit dieser Lampe war es möglich Daueraufnahmen bis zu 6 Stunden zu machen, ohne daß das Verschlußfenster beschlagen worden wäre.

Die Stromzuführung zu den Polgefäßen erfolgte durch eingeschmolzene Platindrähte, die ihrerseits wieder in Quecksilbernäpfe eintauchten. Um eine Elektrolyse an den Quecksilbernäpfen zu verhindern, war das Quecksilber mit einer Schicht Schwefelkohlenstoff überschichtet. Wenn gegen Wasserstoff photographiert wurde, so wurde die Lampe genau wie die Quarzlampen vor die Geißlerröhre gekittet.

Sämtliche Lampen wurden mit einem kleinen Induktorium gezündet und mit 220 Volt Gleichstrom betrieben. Es mußte

bei Zink und Cadmium besondere Bedingungen ausprobiert werden, da bei zu starkem Strom, d. h. zu großem Dampfdruck, die Intensität der Linien wohl durch Selbstabsorption rasch abnahm, hingegen bei schwachem Strom und geringem Dampfdruck eine Menge anderer Linien auftraten, die wohl als Funkenlinien, herrührend vom Kathodenlicht, anzusehen sind. Es gelang jedoch, die reinen Bogenlinien zu isolieren, da sie bei ganz bestimmter Stromstärke noch genügend hell waren, während die Funkenlinien noch nicht auftraten.

Die Präparation der photographischen Platten erfolgte nach dem von Schumann¹⁾ angegebenen Verfahren. Der Guß erfolgte auf alte photographische 9×12 -Platten, welche dann in die gewünschte Größe, d. h. $37 \times 17,5$ mm geschnitten wurden. Als besonders wichtig für die spätere Empfindlichkeit stellte sich heraus, daß die Temperatur der Dunkelkammer, hauptsächlich beim Absitzenlassen der Emulsion, sowie beim Guß der Platten, möglichst hoch, d. h. nicht unter 25°C gehalten wurde. Die Platten wurden auf Vorrat gegossen und vor der Benutzung mindestens 1—2 Monate gelagert um zu reifen. Entwickelt wurde mit Pyrogallol und Soda unter leichtem Bromkalizusatz bei möglichst niedriger Temperatur. Der leichten Verletzlichkeit der Schicht wegen wurden die Platten nach Fixierung und Trocknen an beiden Rändern mit Papierstreifen beklebt und mit einer Deckplatte versehen. Selbst Platten die über 1 Jahr alt waren lieferten mir noch tadellos klare, durchgearbeitete Photogramme.

III. Meßmethode.

Sämtliche Linien wurden gegen Aluminium oder Wasserstoff durch Verschieben des Längenspaltes, der als Spaltblende diente, photographiert. Die Platte blieb während zweier Aufnahmen unberührt an derselben Stelle. Als Normalen dienten von $\lambda = 1990$ bis $\lambda = 1854$ die von C. Runge²⁾ und Eder und Valenta³⁾ bestimmten Aluminiumlinien, und hieran anschließend die Lymanschen Werte⁴⁾ der Aluminiumlinien.

1) V. Schumann, Ann. d. Phys. 5. p. 349. 1901.

2) C. Runge, Wied. Ann. 55. p. 44. 1895.

3) J. M. Eder u. E. Valenta, Wiener Denkschr. 68. p. 541. 1900.

4) Th. Lyman, Astrophys. Journ. 35. p. 341. 1912.

Von $\lambda = 1670$ ab liegen den Messungen die Lyman'schen Werte¹⁾ des Schumann'schen Wasserspektrums zugrunde.

Ausgemessen wurden die Spektrogramme auf einem Zeiß'schen Komparator, welcher 0,0001 mm noch zu schätzen gestattet. Die Interpolation der unbekannten Linien zwischen den Normalen geschah zwischen $\lambda = 1990$ und 1670 in erster Näherung geradlinig. Der hierbei gemachte Fehler wurde aus den Normalen ermittelt und auf graphischem Wege für die vorher berechneten Linien bestimmt. In diesem Gebiet beträgt der mögliche Fehler im Maximum 0,1 AE. Unter 1670 könnte bei genauer Kenntnis der Normalen 0,01 AE. noch erhalten werden. Die Interpolation zwischen den Wasserstofflinien konnte geradlinig erfolgen. Als Normalen wurden immer die nächst benachbarten Wasserstofflinien gewählt. Sämtliche Wellenlängen sind Mittelwerte aus mindestens zwei identischen Aufnahmen. Wo eine Linie nur einmal photographiert, bzw. gemessen werden konnte, ist dieselbe mit einem Stern gekennzeichnet.

Als Probe über die erreichte Meßgenauigkeit mögen folgende Zahlen, die als Stichprobe aus dem Beobachtungsprotokoll entnommen sind, dienen.

Ablesungen am Komparator	Mittel	λ Lyman	λ berechnet
48,1173			
80			
72	48,1177	1633,70	
81			
47,9464			
60			
61	47,9462		1632,11
62			
47,5514			
11	47,5514	1628,50	
16			
14			

Weitere Messungen ergaben 1632,11 und 1632,12.

1) Th. Lyman, *Astrophys. Journ.* 19. p. 203. 1904.

IV. Wellenlängen der neuen ultravioletten Linien.

1. Zink.

Tabelle I.

Platten: 92, 93, 94, 95, 95 a.

J	$\lambda_{\text{vak.}}$	J	$\lambda_{\text{vak.}}$
5	1649,87	2	1476,01
4	1632,11	3	1474,67
4	1601,09	8	1457,56
10	1589,76	1	1450,82
5	1486,20	4	1404,19
		2	1376,87

Die schwächsten Linien sind mit $J = 1$ bezeichnet.

Die von Hrn. Prof. Paschen berechneten Linien sind nach seiner Aufstellung folgende:

Hauptserie einfacher Linien $1,5 S - m P$.

$m =$	3	4	5	6
$\lambda_{\text{ber.}}$	1589,64	1457,64	1404,18	1376,97
$\lambda_{\text{beob.}}$	1589,76	1457,56	1404,19	1376,87
$\lambda_{\text{ber.-beob.}}$	-0,12	+0,08	-0,01	+0,10

Kombination mit dem Tripletsystem: $1,5 S - m p_2$.

$m =$	3
$\lambda_{\text{ber.}}$	1632,08
$\lambda_{\text{beob.}}$	1632,11
$\lambda_{\text{ber.-beob.}}$	-0,03

Von den zahlreichen Linien, die Handke im Funken bei Zink zwischen $\lambda = 1987$ und 1632 gemessen hat, konnte Verfasser selbst bei längster Belichtung im Bogenspektrum nichts finden. Auch konnte das Glied $m = 4$ der Serie vorgelagerter Linien $1,5 S - m p_2$ d. h. $\lambda = 1468,90$ selbst bei längster Exposition nicht erhalten werden, obwohl $m = 3$, $\lambda = 1632,09$ noch ziemlich kräftig erscheint. Es ist also, wie auch Hr. Prof. Paschen vermutet, ein sehr rasches Abklingen der Linien vorhanden.

2. Cadmium.

Die beiden von Eder und Valenta¹⁾ im Funken bestimmten Linien $\lambda_{\text{vak.}}$ 1995,7 und 1943,5 sind nicht identisch

1) J. M. Eder u. E. Valenta, Wiener Denkschr. 68. p. 541. 1900.

Tabelle II.

Platten: 65, 66, 67, 68, 75, 76, 78, 80, 81a, 105.

<i>J</i>	λ vak.	<i>J</i>	λ vak.
1*	1993,07	2	1647,78
6	1942,29	1	1571,40
3	1710,51	1*	1587,88
2	1688,58	8	1526,85
1	1682,12	6	1469,39
10	1669,29	3	1440,18
		1*	1423,23

mit den Bogenlinien 1993,07 und 1942,29 da die entsprechenden Funkenlinien vom Verfasser mit $\lambda = 1995,52$ und 1943,88 gegen Aluminium gemessen wurden. Cadmium $\lambda = 1942,29$ ist ebenfalls nicht identisch mit der starken Quecksilberlinie $\lambda = 1942,52$, da von den ultravioletten Linien des Quecksilbers keine auftritt, obwohl der Bogen im sichtbaren Teil das Hg-Spektrum schwach zeigt. Übrigens müßte sie dann auch im Zink vertreten sein.

Die Abweichungen der Berechnungen und Beobachtungen ergaben sich wie folgt:

Hauptserie 1,5 *S* - *mP*.

<i>m</i> =	3	4	5	6	7
λ ber.	1669,30	1526,73	1469,35	1440,15	1423,22
λ beob.	1669,29	1526,85	1469,39	1440,18	1423,23
λ ber.-beob.	+0,01	-0,12	-0,04	-0,03	-0,01

Kombinationsserie 1,5 *S* - *mp*₂.

<i>m</i> =	3	4
λ ber.	1710,58	1587,89
λ beob.	1710,51	1587,83
λ ber.-beob.	+0,07	+0,06

Bei Cadmium war die Isolierung der Bogenlinien am schwierigsten durchzuführen, da selbst bei genügender Stromstärke flüssiges Cadmium an der Kathode emporgeschleudert wurde und oben im Polgefäß erstarrte. War die Schicht genügend stark, so kletterte das negative Glimmlicht an derselben in die Höhe und brachte sie wieder zum Verdampfen. Dieses Verdampfen war jedesmal von einem intensiv blauen Aufleuchten und dem Auftreten zahlreicher Linien im Ultra-

violett begleitet, welche somit wohl dem Kathodenlicht zuzuschreiben sind.

Beachtenswert sind die beiden starken Linien $\lambda = 1414,14$ und $1411,78$, die anfangs in der Cadmiumlampe auftraten. Da sie jedoch nach und nach verschwanden, sind sie wohl einer Verunreinigung zuzuschreiben.

3. Quecksilber.

Tabelle III.

Platten: 81, 81b, 82, 83, 84, 84a, 85, 106.

J	$\lambda_{\text{gemessen}}$	Handke	Stark ¹⁾ Bogen	Lehmann u. Straubel ²⁾ Geißlerrohr	Huff ³⁾ Geißlerrohr	Lyman
8	2053,7*		2054,41	2055,14		
5	2028,3*		2028,00	2028,84		
2	2002,9*	2004,1	2002,87		2002,23	
1	1988,07			1987,93		
5	1973,98	1972,6	1972,99	1973,73		
4	1973,02					
10	1942,52	1942,1	1942,37	1942,3		
20	1849,57	1850,0				1849,6

* Bei der Messung extrapoliert.

J	$\lambda_{\text{vak.}}$	J	$\lambda_{\text{vak.}}$
2	1832,60	5	1672,25
2	1774,95	8	1650,17
2	1675,55	2	1435,63
		4	1402,72

Von den Linien anderer Autoren sind nur die zum Vergleich herangezogen, welche auch Verfasser im Bogen gefunden hat.

Hauptserie einfacher Linien $1,5 S-m P$.

$m =$	2	3
$\lambda_{\text{ber.}}$	1849,60	1402,71
$\lambda_{\text{beob.}}$	1849,57	1402,72
$\lambda_{\text{ber.}-\text{beob.}}$	+ 0,03	- 0,01

1) J. Stark u. S. Kinoshita, Ann. d. Phys. 21. p. 470. 1906.

2) Lehmann u. Straubel, Ann. d. Phys. 7. p. 909. 1902.

3) W. B. Huff, Astrophys. Journ. 12. p. 103. 1900.

Serie vorgelagerter Linien 1,5 $S-m p_1$.

m	3
λ ber.	1435,59
λ beob.	1435,63
λ ber.-beob.	- 0,04

Bei Quecksilber war es nicht möglich Aufschluß über den Term $m = 4$ der Hauptserie, $\lambda = 1268,9$ zu erhalten. Obwohl die Fluoritoptik des Apparates die Wasserstofflinie $\lambda = 1268$ noch gut durchläßt, erhielt man selbst bei 6stündiger Belichtung keine Spur einer Quecksilberlinie unterhalb 1402,7. Da diese Linie selbst, verglichen mit 1849 ungewöhnlich schwach erscheint (Beleuchtungszeiten $\frac{1}{10}$ Sekunde und 2 Stunden) muß wohl Selbstabsorption der Linien auf dem langen Wege zwischen Lichtbogen und Fenster der Lampe angenommen werden.

V. Korrekturen der Lymanschen Werte einiger Wasserstofflinien auf Grund der berechneten Serienlinien.

Da die berechneten Serienlinien sich mit einer Genauigkeit von 0,01 AE. angeben lassen, lag der Gedanke nahe, die Lymanschen Wasserstofflinien, deren Fehlergrenze nach Lyman selbst 0,2 AE. betragen soll, nach den Metalllinien zu korrigieren. Wie die Abweichungen zeigen, sind jedoch die Lymanschen Werte ziemlich genau. Die zweite Dezimale wurde erhalten, indem an die Werte von Lyman in der zweiten Dezimalen eine Null angefügt wurde, unter der Annahme, diese Stelle sei auch noch verbürgt. Die Differenzen, die sich dann bei den gemessenen gegenüber den berechneten Wellenlängen ergaben, wurden dann an den betreffenden Wasserstofflinien als Korrekturen angebracht. Hierdurch gelang es, die Wasserstofflinien bis auf wenige Einheiten der zweiten Dezimalen festzulegen.

Ein weiterer beachtenswerter Punkt ist die Abweichung der Messungen von Handke und Lyman, insbesondere bei der Aluminiumlinie $\lambda = 1670$. Diese Linie mißt Handke gegen die Lymanschen Wasserstofflinien als Normalen zu $\lambda = 1671,05$, während Lyman dieselbe später direkt aus seiner Methode zu 1670,6 bestimmt. Verfasser hat nun die Handkesche Messung mehreremals wiederholt und den Wert 1670,98, also einen Wert, der annähernd mit dem Handkeschen über-

einstimmt. Setzt man die Lymanschen Wasserstofflinien als richtig voraus, so hätte die Lymansche Aluminiumlinie einen Fehler von $-0,38$ AE. Daß nun dieser Fehler in der Tat vorhanden ist, beweist folgendes: Mißt man die Linie Cadmium $\lambda_{\text{ver.}}$ 1669,30 gegen Aluminium indem man den Lymanschen Wert 1670,6 annimmt, so ergibt sich für diese Linie $\lambda = 1668,91$, während man mit den Wasserstoffnormalen, annähernd den richtigen Wert $\lambda = 1669,29$ erhält, somit wieder obige Differenz von $-0,38$ AE.

Berechnet man nach diesem die Korrektur für die in Betracht kommenden Wasserstofflinien, so erhält man folgende Werte:

Tabelle IV.

λ Lyman	λ korrigiert	λ Lyman	λ korrigiert
1671,60	1671,61	1457,40	1457,48
1667,40	1667,41	1441,00	1440,97
1633,70	1633,67	1436,30	1436,27
1628,50	1628,47	1435,20	1435,16
1591,50	1591,38	1426,80	1426,79
1589,00	1588,88	1420,30	1420,29
1539,20	1539,26	1404,30	1404,29
1537,50	1537,56	1402,80	1402,79
1527,50	1527,38	1402,00	1401,99
1525,40	1525,28	1377,20	1377,30
1473,90	1473,86	1376,10	1376,20
1468,60	1468,56		
1458,40	1458,48		

VI. Kohlenspektrum zwischen 1931 und 1647.

Anlässlich der Untersuchung von Helium im Schumanngebiet wurde die Aufmerksamkeit auf einige starke Linien gelenkt, die als einzige in diesem Gebiet auftraten. Da dieselben jedoch auch in der Wasserstoffröhre bei kondensierter Entladung auftreten, so war anzunehmen, daß diese Linien nicht Helium angehören, sondern einer gemeinsamen Verunreinigung.

Die Wellenlängen sind folgende:

Tabelle V.

Platten: 102, 110, 111, 112.

<i>J</i>	$\lambda_{\text{vak.}}$	<i>J</i>	$\lambda_{\text{vak.}}$
8	1931,05	6	1656,44
1	1826,30	10	1654,96
2	1820,47	5	1653,94
3	1807,39		

Diese Linien stellten sich sämtlich als Kohlenlinien heraus, da sie sowohl im Kohlenbogen im Vakuum, als auch im Funken zwischen Kohlenspitzen auftreten. Die Linie $\lambda = 1931,05$ koinzidiert genau mit der von Eder und Valenta¹⁾ gemessenen Aluminiumlinie. Schon Schumann hatte erkannt, daß diese Linie wohl nicht dem Aluminium angehöre und schrieb sie dem Silicium zu. Eder und Valenta konnten sie jedoch bei einer Silicium-Kupferlegierung nicht erhalten und so führen sie die Linie unter Aluminium weiter. Vergleichende Versuche wurden mit Silicium angestellt, und es zeigte sich, daß hier im Funken zwischen zwei Siliciumkristallen die Linie $\lambda = 1931,05$ nur ganz schwach auftrat. Die starke Linie $\lambda = 1654,96$ hat auch Lyman auf seinen Spektrogrammen²⁾ und dieselbe richtig als Kohlenlinie erkannt. Da dieselbe jedoch sehr schwach ausgeprägt ist, konnten die beiden anderen Linien $\lambda = 1656,44$ und $1653,94$ wohl nicht mehr von ihm erkannt werden.

Bei der Untersuchung des Siliciumfunkens zeigte sich ein ganz auffallend starkes Hervortreten der beiden Linien $\lambda = 1745,3$ und $1742,7$, die sowohl im Aluminiumfunken wie auch bei Kohle und verschiedenen anderen Elementen auftreten. Lyman²⁾ schreibt diese Linien dem Stickstoff zu. Da dieselben jedoch im Siliciumfunken als einzige charakteristische Linien in diesem Gebiet, und zwar relativ zu Kohle und Aluminium äußerst intensiv hervortreten, dürfte wohl anzunehmen sein, daß diese Linien dem Silicium angehören.

1) J. M. Eder u. E. Valenta, l. c. p. 533.

2) Th. Lyman, Astrophys. Journ. 35. p. 341. 1912.

VII. Schluß.

Die Ergebnisse vorliegender Arbeit sind folgende:

1. Es ist ein neuer Typ einer Quarzglaslampe ausgearbeitet worden, die es ermöglicht, verschiedene Metallbogen über die Durchlässigkeit des Quarzes hinaus spektroskopisch zu untersuchen.

2. Es sind die Bogenspektren von Zink, Cadmium und Quecksilber bis zur Durchlässigkeitsgrenze des Flußspats herab untersucht worden.

3. Durch Auffinden der von Hrn. Prof. Paschen berechneten Serienlinien ist die richtige Einreihung der fraglichen Linien, hauptsächlich bei Quecksilber, bewiesen.

4. Auf Grund der berechneten Werte der Serienlinien war es möglich einige Wasserstofflinien bis auf einige Einheiten der zweiten Dezimalen sicherzustellen.

5. Durch Untersuchung von Kohle und Silicium wurden verschiedene neue Kohlenlinien gemessen und einige strittige Linien mit ziemlicher Sicherheit dem richtigen Element zugeteilt. Ferner ergab sich in Übereinstimmung mit Lyman, daß Helium im Gebiet zwischen $\lambda = 1850$ und 1402 keine Linien aufweist.

Vorliegende Arbeit wurde am hiesigen Physikalischen Institut von Weihnachten 1911 bis Ostern 1913 ausgeführt.

Dem Vorstand des Instituts, Hrn. Prof. Paschen, bin ich für die Überlassung der äußerst wertvollen Apparate, sowie für die mir zuteil gewordene Anregung und Unterstützung zu größtem Dank verpflichtet.

Tübingen, Physikal. Institut, Juli 1913.

(Eingegangen 29. Juli 1913.)

10. *Bemerkungen zur Arbeit des Hrn. K. Wolff;
von F. Paschen.*

Die vorstehende Arbeit des Hrn. K. Wolff, welche durch die hochherzige Stiftung der wertvollen Fluorit-Vakuumapparate von seiten der Frau Kommerzienrat Hauswaldt ermöglicht wurde, erbringt den Nachweis, daß die früher von mir berechneten¹⁾ Serien existieren. Ihre Linien sind die einzigen starken, welche die Bogenspektren der Elemente Zn, Cd, Hg im Schumanngebiete besitzen. Dadurch ist für diese Spektren das vollständige System der Serien einfacher Linien unzweifelhaft festgestellt. Es enthält Serien ganz analog denen, welche für Dublets und Triplets bekannt sind: nämlich erstens die Kombination $mP - nS$, von der zwei Hauptserien $n = 1,5$ und $n = 2,5$ und eine II. Nebenserie $m = 2$ verfolgt sind, zweitens die Kombination $2P - mD$ vertreten durch je eine kräftige I. Nebenserie, drittens die Bergmannserie $3D - m\Delta p$. Es ist danach zweifellos, daß das allgemeine Serienschema eines Elementes außer den Seriensystemen von Dublets und Triplets noch ein analoges ganz einfacher Linien umfaßt. Auch für Magnesium habe ich zusammen mit Hrn. Lorensen das analoge System einfacher Linien gefunden, dessen I. Nebenserie durch die lange bekannte Rydbergsche Serie gebildet wird, und dessen Grundlinie $2P - 1,5 S$ die starke Linie 2852 ist. Hr. Lorensen wird dies und die Anfänge der Seriensysteme von Ca, Sr, Ba, welche er gefunden hat, veröffentlichen. Auch hier, wie bei den Serien einfacher Linien von Zn und Cd rührt der Anfang der richtigen Ordnung von F. A. Saunders her.

Sämtliche Linien dieser Serien, welche auf Zeemaneffekt untersucht sind, geben exakt normale Zeemantriplets und es scheint, daß dieses normale Triplet in diesen Spektren nur bei den Linien dieser Serien auftritt. Die Elektronenschwingungen,

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 30. p. 746. 1909; 35. p. 860. 1911 (Arbeit II); 40. p. 602. 1913 (letztere „Erläuterungen“).

welche einem vollständigen Serienspektrum entsprechen, sind demnach im Sinne Sommerfelds¹⁾ dreierlei Art: Erstens solche, für die das Medium ein isotropes ist, zweitens solche, die zwei verschiedenen Direktionskräften unterliegen und Dublets geben, drittens solche mit drei verschiedenen Direktionskräften, dem Triplet entsprechend. Soweit die Serienspektren bekannt sind, sind die Fälle der Anisotropie hiermit erschöpft. Man kann sich die Anisotropie daher als eine Art räumlicher Kristallstruktur des Atoms vorstellen mit höchstens drei nach verschiedenen Richtungen vorhandenen verschiedenen Direktionskräften des schwingenden Elektrons.

Im einzelnen beweist die Arbeit Wolffs folgendes:

Die Existenz der berechneten Hauptserie $1,5 S - mP$ macht zur Gewißheit, daß die Grundlinie $1,5 S - 2 P$ gebildet wird durch die Linien 2138,7 Zn, 2288,1 Cd, 1849,0 Hg.

Die Existenz der Kombinationsserie $1,5 S - m p_2$ folgt hieraus nach meinen „Erläuterungen“ mit Notwendigkeit. Ihre Grundlinien $1,5 S - 2 p_2$ sind 3076,0 Zn, 3261,2 Cd, 2536,7 Hg.

Bei den Spektren von Zn und Cd war früher nichts zweifelhaft geblieben. Dagegen mußte ich bei Quecksilber zweifelhaft lassen erstens das Glied $2,5 s - 3 p_1$ der Triplet-hauptserie, zweitens die Glieder $2,5 S - 3 P$ und $2,5 S - 4 P$ der von mir gefundenen und folgeweise auch die Glieder $1,5 S - 3 P$ und $1,5 S - 4 P$ der berechneten Hauptserie.

In bezug auf den ersten Punkt folgt aus der Existenz der Linie 1435,64, welche als Kombination $1,5 S - 3 p_2$ berechnet war, daß das Glied $2,5 s - 3 p_2$ durch die Linie 13674,3 Å.-E. gebildet wird, und daß daher das Triplet 11288,16, 13674,32, 13952,01 entgegen der Serienrechnung das zweite Glied $2,5 s - 3 p_1$ der Triplethauptserie ist. Dies habe ich aus anderen Gründen schon vermutet (Arbeit II).

Ebenso beweist die Existenz der starken Hauptserienlinie $1,5 S - 3 P$ 1402,72, daß die von mir vermutungsweise dafür angegebene Linie 13571,90 tatsächlich das Glied $2,5 S - 3 P$ ist. Es besitzt also auch die Hauptserie einfacher Linien hier eine Diskontinuität in dem früher (Arbeit II) erörterten Sinne. Das ebenfalls fragliche Glied $2,5 S - 4 P$ dieser Serie wird hiernach wahrscheinlich durch die mit einem Fragezeichen an-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 40. p. 748. 1913.

gegebene Linie 6716,7 gebildet, deren korrespondierendes Glied $1,5 S - 4 P$ die Linie 1268,9 sein würde. Daß Hr. Wolff diese nicht mehr gefunden hat, kann an mangelnder Empfindlichkeit des Apparates in dieser Gegend und auch an starkem Intensitätsabfall in der Serie liegen, der durch die in seiner Lichtquelle mögliche stärkere Selbstumkehrung begünstigt sein kann.

Die Genauigkeit der berechneten Wellenlängen $1,5 S - m P$ oder $1,5 S - m p_3$ ist hauptsächlich bedingt durch den Fehler des Terms $1,5 S$. Dieser ist abgeleitet

	für Zn	Cd	Hg
aus der Wellenlänge	2138,67	2288,10	2536,72.

Ein Fehler dieser Zahlen würde einen halb so großen Fehler in sämtlichen berechneten Linien veranlassen. Z. B. ergibt sich für Zn aus 2138,67 (nach Exner und Hascheck) für $1,5 S - 3 P$ die Wellenlänge 1589,64, dagegen aus 2138,3 (nach Ames) 1589,43.

Die Terme $m P$, welche aus den beobachteten Linien der Serie $2,5 S - m P$ gewonnen sind, würden selbst bei großen Fehlern die Genauigkeit nicht gefährden. Z. B. ist der Term $3 P$ für Zn aus der Linie 14039,5 Å.-E. berechnet zu 12852,8. Die um 1 Å.-E. kleinere Wellenlänge 14038,5 Å.-E. würde ergeben $3 P = 12852,3$. Daraus würde folgen für $1,5 S - 3 P$ $\lambda = 1589,63$ statt 1589,64. Da die oben angeführten Wellenlängen der Zn-, Cd-, Hg-Linien in Rowlands Skala bis auf 0,04 Å.-E. sicher sein dürften, darf man alle von mir berechneten Wellenlängen im Schumanngebiete als bis auf 0,02 Å.-E. genau ansehen. Sie sind daher bis jetzt die besten Wellenlängennormalen des Schumanngebietes. Es liegt im Wesen des Kombinationsprinzips, daß man bei der Berechnung kurzer Wellenlängen aus langen eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit der Wellenlängen gewinnt.

Anm. bei der Korrektur: Die Bestätigung, welche meine Serienordnung, speziell der Hg-Linien 2536 und 1849 durch Wolffs Arbeit erfahren hat, erübrigt wohl ein weiteres Eingehen auf erneut vorgebrachte Einwände des Hrn. Stark¹⁾ gegen diese Ordnung.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 42. p. 238. 1913.

(Eingegangen 29. Juli 1913.)

11. Über die Schallintensität des tönenden Lichtbogens¹⁾; von H. Lichte.

(Mitteilung aus dem Institut für Angewandte Elektrizität der Universität Göttingen.)

Einleitung.

H. Th. Simon²⁾ machte im Jahre 1897 folgende Entdeckung:

Überlagert man einem Gleichstromlichtbogen Wechselströme von bestimmter Frequenz, so erzeugt der Lichtbogen einen musikalischen Ton, dessen Höhe der Frequenz des überlagerten Wechselstromes entspricht. Sind diese Wechselströme z. B. Mikrophonströme, so gibt der Lichtbogen alles in das Mikrophon Gesprochene mit überraschend getreuer Klangfarbe wieder. Der Lichtbogen läßt sich also als Telephon von sehr vollkommenen Klangeigenschaften verwenden.

Simon selbst gibt die Erklärung dieser eigentümlichen Erscheinung durch die in dem Lichtbogen hervorgerufenen Schwankungen der Jouleschen Wärme. Diese bewirken entsprechende Temperaturschwankungen, die Dichteänderungen der umgebenden Luft zur Folge haben. Diese Dichteänderungen breiten sich als Schallwellen in die umgebende Luft aus. Nach einer anderen Erklärung, die auch von Simon erwogen ist, ist das Verdampfen der Elektroden oder auch die Dissoziation des Elektrodengases periodischen Schwankungen unterworfen, die entsprechende Veränderungen des Flammenvolumens hervorrufen und so Schallwellen erregen. Die im Lichtbogen verbrauchte periodisch variierende Leistung ist nach beiden Erklärungen verantwortlich für die beobachtete akustische Wirkung.

Es mag noch erwähnt werden, das Baumgardt³⁾ die

1) Auszug aus einer von der philosophischen Fakultät (Göttingen) angenommenen Dissertation.

2) H. Th. Simon, Wied. Ann. 64. p. 223. 1898.

3) E. Baumgardt, Elektrotechn. Zeitschr. 22. p. 511. 1901.

Wirkung des magnetischen Erdfeldes zur Erklärung der Erscheinungen heranzieht. Nach ihm soll der Lichtbogen durch das magnetische Erdfeld eine Ablenkung senkrecht zur Stromrichtung erfahren, die mit der Stromstärke wächst. Wenn der Strom seine Stärke ändert, dann soll sich auch die Stellung des Bogens ändern. Diese Erklärung ist jedoch abzulehnen, da sonst wohl die Wirkung durch ein magnetisches Hilfsfeld beeinflußt werden könnte.

Die von dem Lichtbogen ausgesandte Schallenergie ist um so größer, je größer der Elektrodenabstand ist. Ferner nimmt sie zu mit der Wechselstromstärke, was bereits von Simon qualitativ festgestellt wurde. Quantitative Messungen über die Schallintensität des tönenden Lichtbogens unter verschiedenen Betriebsbedingungen wurden von Rihl¹⁾ ausgeführt. Er untersuchte die Abhängigkeit der Schallintensität von der Bogenlänge, von der Wechselstromstärke und von der Gleichstromstärke bei einer bestimmten Frequenz und gelangte zu folgenden Resultaten:

1. Bei konstantem Gleichstrom und konstanter Stromstärke des überlagerten sinusförmigen Wechselstromes ist die ausgesandte Schallenergie dem Quadrat der Bogenlänge proportional:

$$S = A \cdot l^2.$$

Für nichtsinusförmige Wechselströme gilt die Beziehung

$$S = A \cdot l^2 + B \cdot l^3.$$

2. Bei konstanter Bogenlänge und konstanter Gleichstromstärke ist die Schallintensität dem Quadrat des überlagerten Wechselstromes proportional:

$$S = G \cdot J^2.$$

3. Bei konstanter Wechselstromstärke und konstanter Bogenlänge haben die Kurven, die die Schallintensität als Funktion der Gleichstromstärke darstellen, dieselbe Form wie die entsprechenden Charakteristiken, so lange die Wechselstromamplituden nicht zu groß werden. Bei abnehmendem Gleichstrom wächst also die Schallintensität.²⁾

1) Wilh. Rihl, Diss. Göttingen. Ann. d. Phys. 36. p. 647. 1911.

2) Für tönende Leiter, die von einem sogenannten Wellenstrom durchflossen werden, hat F. Braun (Wied. Ann. 65. p. 358. 1898) gezeigt, daß die Intensität des Tönens der Gleichstromstärke proportional sein muß.

4. An Hand von oszillographischen Aufnahmen der Strom- und Spannungskurven wurde gezeigt, daß die beobachteten Ergebnisse zu erwarten waren, unter der Annahme, daß die erzeugte Schallenergie ein Bruchteil der zugeführten Wechselstromenergie ist. Bei gleichbleibender Bogenlänge wird stets nahezu derselbe Bruchteil der Wechselstromenergie in Schallenergie verwandelt, während dieser Bruchteil mit zunehmender Bogenlänge schnell wächst.

Aus diesen Resultaten läßt sich noch nicht entscheiden, ob die Veränderung der Jouleschen Wärme auf der Leitungsbahn oder die periodische Schwankung der Verdampfung oder der Dissoziation für die akustische Wirkung verantwortlich ist.

Da die Kenntnis der Abhängigkeit der Schallintensität von der Frequenz des überlagerten Wechselstromes Klärung dieser Vorgänge erwarten ließ, wurde in der vorliegenden Arbeit auf Anregung von Hrn. Professor Simon die Untersuchung dieser Abhängigkeit vorgenommen. Ferner wurde die Abhängigkeit der Schallintensität von der Kohlebeschaffenheit untersucht.

Erster Teil.

Vorbereitende Untersuchungen.

A. Schallintensitätsmessungen.

1. Allgemeines.

Wenn sich Schallwellen durch den Raum fortpflanzen, so führen sie eine gewisse Energie mit sich. An einer bestimmten Stelle des Raumes wird von der Welle durch die zur Fortpflanzungsrichtung senkrechte Flächeneinheit in der Zeit t die Energie hindurchgeführt

$$(1) \quad E = \int_0^t p \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

wo p der Druck an der betrachteten Stelle und u die Verdrückung eines Teilchens ist. Da wir es mit rein sinusförmigen Wellen zu tun haben, so ist

$$(2) \quad u = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct),$$

wenn A die Amplitude der Verrückung, λ die Wellenlänge und c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeuten. Ferner gilt nach dem Hooke'schen Gesetz die Beziehung

$$(3) \quad p = -c^2 \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

σ ist die Dichte des Mediums an der betrachteten Stelle.

Geht man mit den Ausdrücken (2) und (3) in (1) ein, so erhält man

$$E = c^3 \cdot \sigma \cdot A^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \int_0^t \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) dt,$$

woraus sich die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit wandernde Energie bestimmt zu

$$S = \frac{E}{T} = \frac{1}{2} c^3 \sigma A^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2,$$

wenn T die Dauer einer Periode ist.

Diesen Ausdruck S nennen wir mit Lord Rayleigh die Schallintensität an der betrachteten Stelle.

Wir können diesem Ausdruck eine etwas andere Form geben, wenn wir bedenken, daß

$$c = n \lambda$$

ist. Man erhält

$$S = 2\pi^2 c \sigma A^2 n^3.$$

Wir haben also das Resultat, daß die Schallintensität proportional ist dem Quadrat der Amplitude der Verrückung A^2 , ferner proportional ist dem Quadrat der Frequenz (Tonhöhe) n^2 . Da

$$2\pi n A = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c A$$

ist, kann man auch sagen: Die Schallintensität ist proportional dem Quadrat der Geschwindigkeitsamplitude. Es ist nämlich

$$\frac{2\pi}{\lambda} c A = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\max}.$$

Der Vollständigkeit halber mag noch erwähnt werden, daß sich die Schallintensität ausdrücken läßt durch die größte relative Druckschwankung δ

$$S = \frac{\sigma}{2} \frac{c^3}{x} \delta^2,$$

wo x das Verhältniß der spezifischen Wärme ist.

2. Methoden zur Messung der Schallintensität.

Die wichtigsten Methoden zur Messung der Schallintensität sind die folgenden:

1. Wien ¹⁾ knüpft an die Formel an

$$S = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{c^3}{x} \cdot \delta^2.$$

Man sieht, daß man hier von der Tonhöhe vollständig unabhängig ist. Die Druckschwankungen in freier Luft sind jedoch so gering, daß diese Methode für unsere Zwecke nicht brauchbar war. Wien verstärkt die Druckänderungen durch Anwendung von Resonatoren.

2. Altberg ²⁾ mißt den Druck, den Schallwellen auf eine ebene reflektierende Wand ausüben.

3. Raps ³⁾ mißt mittels sinnreich konstruierter Ventile die Luftdruckschwankungen in Resonatoren.

4. Die vierte Methode ist die der Rayleighschen Scheibe. Diese letzte Methode wurde auch in der vorliegenden Arbeit benutzt.

Sie beruht auf der von Rayleigh gemachten Beobachtung, daß ein Rotationsellipsoid, das frei beweglich in den Gang von Schallstrahlen gebracht wird, sich senkrecht zur Richtung alternierender Luftströmungen einstellt.

W. König ⁴⁾ hat das Problem theoretisch behandelt, indem er die drehenden Kräfte berechnet, die auf ein Rotationsellipsoid von einer strömenden Flüssigkeit ausgeübt werden, wenn die Rotationsachse einen Winkel ϑ mit der Strömungsrichtung bildet. Er findet für das Drehungsmoment M den Ausdruck

$$M = K \cdot \frac{1}{2} \cdot \sigma \pi^2 \cdot A^2 \cdot n^2 \cdot g^2 k \sin 2\vartheta,$$

wo g die große, k die kleine Achse des Rotationsellipsoids und K ein Konstante ist, die nur von

$$\frac{g^2 - k^2}{g^2}$$

abhängt.

1) M. Wien, Wied. Ann. 36. p. 834. 1889.

2) W. Altberg, Ann. d. Phys. 11. p. 405. 1903.

3) A. Raps, Wied. Ann. 36. p. 273. 1889.

4) W. König, Wied. Ann. 43. p. 43. 1893.

Die Schallintensität wird also durch das drehende Moment M gemessen:

$$S = \frac{4c \cdot M}{K \cdot g^2 k \sin 2\vartheta}.$$

Zernow¹⁾ hat die Theorie von W. König experimentell geprüft und gefunden, daß seine Formel für Rotationsellipsoide in schwingender Luft innerhalb der Versuchsfehler von 0,5 Proz. vollkommen bestätigt wird. Er hat ferner für Kreisscheiben eine empirische Formel aufgestellt, die für sehr dünne Kreisscheiben mit der von König übereinstimmt. Die größte Schallempfindlichkeit haben wir dann, wenn die Scheibe unter einem Winkel von 45° zur Strömungsrichtung steht.

3. Phonometer.

Grimsehl²⁾ konstruierte auf Grund der von Rayleigh gemachten Beobachtung ein Phonometer, das er zu relativen Schallintensitätsmessungen benutzte. Lebedew³⁾ ersetzte die Scheibe durch einen rechteckigen Spiegel. Das in der vorliegenden Arbeit benutzte Phonometer ist in der Werkstätte des Instituts nach den von Lebedew zur Verfügung gestellten Konstruktionsangaben gebaut und bereits von Rihl zu seinen Schallintensitätsmessungen benutzt worden.

Eine Beschreibung des Instrumentes befindet sich in der Dissertation von Rihl.

Die Ablesung geschieht objektiv mittels Nernstlampe und Skala.

Rihl hatte versucht, das Phonometer frei in den Gang der Schallstrahlen aufzustellen. Es war dann aber nicht möglich, Messungen auszuführen, da sich infolge der Reflexion an den Zimmerwänden stehende Wellen bildeten, die sich natürlich bei den geringsten Schwankungen der Tonhöhe fortwährend änderten; infolgedessen waren auch die Ausschläge des Phonometers nie konstant zu erhalten.

4. Resonatoren.

Um den Einfluß der stehenden Wellen, die sich im Zimmer ausbildeten, zu beseitigen, wurde das Phonometer in einen

1) W. Zernow, Ann. d. Phys. **26**. p. 79. 1908.

2) E. Grimsehl, Wied. Ann. **34**. p. 1028. 1888.

3) P. Lebedew, Wied. Ann. **62**. p. 163. 1897.

Resonator hineingestellt, der dann von außen durch die Schallquelle (Lichtbogen bzw. Telephon) erregt wurde. Die Resonatoren bestanden aus 50 mm weitem Messingrohr, das teleskopartig ineinander verschiebbar war, um die Länge bequem variieren zu können. An einem Ende war das Rohr durch ein Glasfenster verschlossen, durch das das Licht der Nernstlampe hindurchfiel auf den Spiegel des Phonometers. Am anderen offenen Ende stand die Schallquelle. Es ist nun nötig, das Phonometer in den Schwingungsbauch der in dem Rohr sich ausbildenden stehenden Welle hineinzubringen. Um dies zu erreichen (vgl. auch Rihl, Dissertation), wurde bei konstant gehaltenem Abstand der Telephonmembran von der Rohröffnung A (vgl. Fig. 1) die Gesamtrohrlänge AC so lange geändert, bis das Phonometer bei der betreffenden Frequenz seinen maximalen Ausschlag erreichte. Dann wurde die Gesamtrohrlänge konstant gehalten und das Phonometer im Rohr so lange verschoben, bis der Ausschlag des Phonometers wieder ein Maximum war. Dann stand das Phonometer sicher in einem Schwingungsbauch.

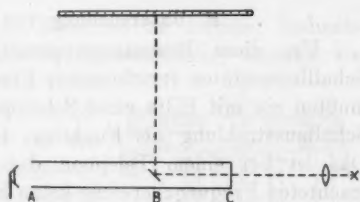


Fig. 1.

Die Länge BC ist dann gleich einer viertel Wellenlänge. Die Länge AB ist etwas kürzer als eine halbe Wellenlänge, d. h. der Bauch der stehenden Welle liegt außerhalb der Rohr-

Frequenz n	AB cm	BC cm	λ cm	$v = \lambda \cdot n$ m/sec.	Ton
220	74,6	89,0	156,0	348	a
306	53,9	27,8	111,2	340,5	dis ₁
378	44,0	22,5	90,0	340	g ₁
457	34,8	18,6	74,4	340	a ₁ s ₁
549	28,4	15,5	62,0	340,5	c ₁ s ₂
630	25,4	13,3	53,2	336	dis ₂
720	21,8	11,8	47,2	340	f ₁ s ₂
846	17,95	10,05	40,2	340,5	g ₁ s ₂

öffnung, die Reflexion der Welle findet nicht in der Ebene der Rohröffnung statt.

Die bei verschiedenen Frequenzen gefundenen Rohrlängen sind in der vorstehenden Tabelle p. 849 wiedergegeben.

Der Abstand der Telefonmembran von der Rohröffnung war bei allen Messungen 2,2 cm.

In der vierten Kolonne findet sich die Wellenlänge $\lambda = 4BC$, die fünfte Kolonne enthält die daraus berechnete Schallgeschwindigkeit. Aus dieser Kolonne ergibt sich die Schallgeschwindigkeit im Mittel zu 340,5 m/sec. Die einzelnen Werte weichen wenig von diesem Mittelwert ab.

B. Untersuchung von Membranen.

Um diese Resonanzphonometer zur Vergleichung von Schallintensitäten verschiedener Frequenz brauchen zu können, mußten sie mit Hilfe einer Schallquelle geeicht werden, deren Schallausstrahlung als Funktion der Frequenz bekannt war. Das ist bei einem Telefon der Fall, welches in dem betrachteten Frequenzbereiche keine Eigenschwingung besitzt und genügend weit von einer solchen entfernt wird, vorausgesetzt, daß man dasselbe durch einen sinusförmigen Strom erregt. Inwieweit die verwendeten Membranen jene Bedingung erfüllten, mußte besonders geprüft werden.

1. Versuchsanordnung.

a) Schaltung.

Die Versuchsanordnung dazu war folgende:

Der Strom einer Hochfrequenzmaschine, die bis 900 Perioden gab, ging durch ein auf Resonanz abgestimmtes System

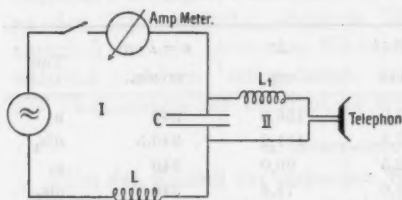


Fig. 2.

hatte den Zweck, Oberschwingungen des Wechselstromes möglichst zu unterdrücken. Der Strom J_0 in Kreis I wurde ge-

aus Kapazität C und Selbstinduktion L (vgl. Fig. 2). Parallel zur Kapazität lag unter Vorschaltung einer sehr hohen Selbstinduktion (2,47 Henry) ein Telefon. Diese

messen mit einem Elektrodynamometer von Hartmann und Braun. Die Stromstärke in Kreis II ist dann für den Fall der Resonanz in Kreis I

$$J = \frac{J_0}{(2\pi n)^2 \cdot L_1 \cdot C},$$

wenn man wie in unserem Falle den Ohmschen Widerstand in Kreis II gegen den induktiven vernachlässigen darf.

b) Telephon.

Der Hartgummiring des Telephons wurde ersetzt durch einen Messingring, um die ganze Fläche der Membran frei zu legen.

Um die Ausschläge der Membran zu messen, bediente man sich einer empfindlichen Spiegelanordnung, ähnlich wie die von Pollak-Virág bei ihrer Schnelltelegraphie angewendet wird. Ein feiner Stift, der mitten auf die Membran bei *A* (vgl. Fig. 3) aufgelötet ist, drückt bei *B* gegen eine Feder *F* aus Stahl, die hier rechtwinklig umgebogen und bei *C* zu einer Schneide ausgebildet ist. *C* wird gabelförmig

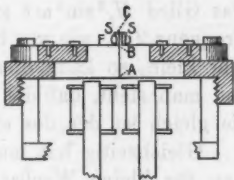


Fig. 3.

von zwei festen Schneiden *D* umfaßt. Auf dem durch die drei Schneiden definierten Dreiecke, um die festen Schneiden *D* drehbar, ruht ein kleiner Spiegel *SS*. Er ist auf ein Eisenplättchen aufgeklebt, welches magnetisch von den Schneiden *C* und *D* festgehalten wird. Dazu sind die eisernen Schneidenträger auf die Pole eines permanenten Magneten geschraubt. Mittels des Spiegels *SS* wurde das Bild eines von einer Nernstlampe beleuchteten Spaltes auf eine Skala entworfen. Führt die Telephonmembran Schwingungen aus, so zieht sich das Bild des Spaltes auf der Skala zu einem Lichtband auseinander, dessen Breite der Amplitude der Membran proportional ist. Die Ränder des Lichtbandes erschienen als scharfe helle Streifen, da die Schwingung der Membran auf ihren Umkehrpunkten relativ lange verweilte. Oberschwingungen machten sich dadurch bemerkbar, daß außer dem Lichtbande am Rande noch ein oder mehrere helle Streifenpaare innerhalb des Bandes erschienen.

2. Ergebnisse.

Die Amplitude der Membran ist proportional dem Quadrat der wirkenden Feldstärke, diese proportional der Stärke des Stromes, der das Feld erzeugt. Hat man ein reines Wechselfeld $H_1 \sin \omega t$, so ist also

$$A \sim H_1^2 \cdot \sin^2 \omega t = H_1^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}.$$

Wir haben mithin eine Wirkung von der Periode 2ω . Die Membran wird sowohl bei jedem Strommaximum als auch beim Stromminimum angezogen. Um eine Membranschwingung von derselben Frequenz wie der des erregenden Wechselstromes zu bekommen, überlagert man das Wechselfeld $H_1 \sin \omega t$ einem permanenten Feld H_0 . Dann ist die Membranamplitude

$$A \sim (H_0 + H_1 \sin \omega t)^2 = H_0^2 + 2 H_0 H_1 \sin \omega t + H_1^2 \sin^2 \omega t.$$

Das Glied $H_1^2 \sin^2 \omega t$ gibt Anlaß zu einer Wirkung von der Frequenz 2ω , wie wir bereits gesehen haben. Wählt man H_1 sehr klein, so kann dieses letzte Glied vernachlässigt werden, und man sieht, daß die Membran mit einer Frequenz schwingt, die gleich ist der des erregenden Wechselstromes.

Gleichzeitig hat man durch ein kleines H_1 erreicht, daß man für kleine Wechselströme eine lineare Abhängigkeit der Membranamplitude von der Stromstärke bekommt. In der Fig. 4 sind Messungen wiedergegeben, die ausgeführt wurden an einer Membran von 20 mm Durchmesser und 0,25 mm Dicke. Die Ordinaten für die Frequenzen 288—846 sind der Deutlichkeit wegen überhöht gezeichnet.

Die lineare Abhängigkeit der Membranamplitude von der Telefonstromstärke bleibt nicht bestehen, sobald man in die Nähe von Resonanzstellen kommt. Die Kurven zeigen hier einen ganz unregelmäßigen Verlauf, etwa wie die Kurven I und II in Fig. 5.

Das liegt daran, daß sich die Resonanzstellen mit Vergrößerung der Erregerstromstärke etwas verschieben.

Arbeitet man mit einem reinen Wechselfeld, ist also $H_0 = 0$, so bekommt man natürlich eine quadratische Abhängigkeit der Membranamplitude.

In einigen Fällen wurde die Stromstärke so weit gesteigert, daß Sättigung des Eisenkernes eintrat. Man bekommt dann Kurven von der Form III in Fig. 5.

Es wurden nun von einer Reihe von Membranen die Kurven aufgenommen, die die Abhängigkeit der Membranamplitude von der Frequenz wiedergeben.

Für unsere Zwecke kam es darauf an, eine Membran zu haben, deren Ausschläge möglichst unabhängig von der Frequenz waren. Für eine solche Membran sollen in der folgenden Tabelle die entsprechenden Angaben gemacht werden.

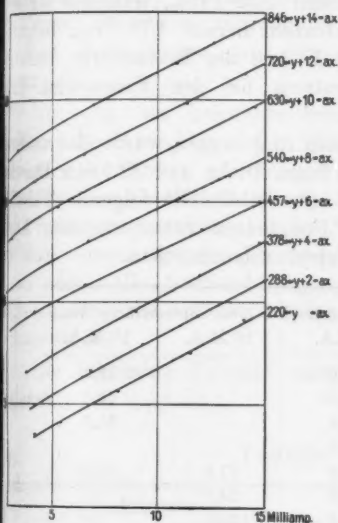


Fig. 4.

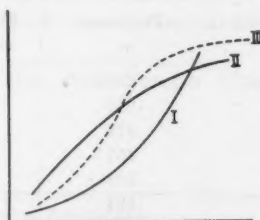


Fig. 5.

Frequenz <i>n</i>	Bildbreite für Telephonstromstärke von		
	4 M.A.	10 M.A.	20 M.A.
220	21,9	9,8 ¹⁾	18,8
288	22,3	10,6	19,8
337,5	22,2	10,8	18,8
378	22,1	10,9	
436,5	22,8	11,0	20,5
463,5	22,1	11,2	
508	22,6	11,3	
549	26,4		
594	28,8		

1) Die Spiegelanordnung wurde für 10 und 20 M.A. unempfindlicher gemacht.

Diese Angaben beziehen sich auf eine Weicheisenmembran von 50 mm Durchmesser und 0,25 mm Dicke. Bei einer Erregerstromstärke von 4 M.A. beträgt die mittlere Abweichung bis einschließlich 508 Perioden 0,52 Proz., während sie bei 10 M.A. bis zu dieser Periodenzahl bereits 4,75 Proz. beträgt. Diese Membran wurde zum Eichen der Resonatoren benutzt mit 4,5—6,0 M.A. Erregerstrom bei den Frequenzen 220 bis 508.

Um zu höheren Frequenzen zu gelangen, wurde eine andere Membran untersucht von 0,35 mm Dicke und 32,5 mm Durchmesser. Das Material war aus Stahl. Die folgende Tabelle gibt uns die verschiedenen Frequenzen entsprechenden Ausschläge bei verschiedenen Telephonstromstärken.

Frequenz "	Bildbreite bei einer Stromstärke von		
	5 M.A.	10 M.A.	15 M.A.
220	21,0		56,2
288	21,0		53,7
378	21,0		51,7
457	21,0		
508	21,0	37,5	52,8
594	21,0	38,0	
630	21,0	36,5	
684	21,0	37,0	
720	21,0	37,0	53,8
765	21,0	37,5	
846	21,0	38,5	55,1
891	21,0	37,5	

Wir sehen, bei der kleinen Telephonstromstärke von 5 M.A. sind die Ausschläge für alle Frequenzen konstant. Die mittlere Abweichung bei 15 M.A. beträgt nur 1,27 Proz.

Diese Membran wurde zum Eichen der Resonatoren bis zu 846 Perioden benutzt.

C. Eichung der Resonatoren.

Mit Hilfe der so gewonnenen Membranen wurde das Phonometer geeicht. Die Membran wurde mit ganz freier Öffnung in einem bestimmten festen Abstände vor der Öffnung des Rohrresonators aufgestellt.

Es wurden die Ausschläge des Phonometers bei verschiedenen Frequenzen gemessen. Die Telephonstromstärke wurde bei ein und derselben Meßreihe konstant gehalten und damit, wie oben gezeigt, die Membranamplitude. Nun ist aber die von einer Membran ausgesandte Schallenergie unter sonst gleichen Bedingungen proportional dem Quadrat der Frequenz (n^2).

Um also auf konstante Schallintensität zu reduzieren, mußten die Ausschläge des Phonometers mit n^2 dividiert werden. Bezeichnen wir diese reduzierten Ausschläge mit S_n , so geben uns die Verhältnisse S_n/S_{220} an, wieviel mal stärker der Phonometerausschlag bei der Frequenz n ist im Vergleich zu dem Ausschlage des Phonometers bei der Frequenz 220, wenn sonst alle Betriebsbedingungen dieselben sind, hauptsächlich auch die von der schwingenden Membran ausgesandte Schallenergie.

Die folgenden Tabellen mögen das eben Gesagte illustrieren.

Tabelle A

	Frequenz n	Ausschlag	reduz. Ausschlag S_n	S_n/S_{220}
4,5 M.A.	220	1,5	3,1	1,00
	378	9,5	6,65	2,145
	457	23,0	11,0	3,55
	508	30,0	11,6	3,74
5,0 M.A.	220	2,0	4,13	1,00
	378	12,0	8,4	2,035
	457	29,5	14,12	3,42
	508	40,5	15,7	3,80
5,5 M.A.	220	2,3	4,76	1,00
	378	14,6	10,42	2,15
	457	35,7	17,1	3,58
	508	46,5	18,0	3,78
6,0 M.A.	220	2,8	5,78	1,00
	378	18,0	12,6	2,18
	457	43,5	20,8	3,60
	508	59,0	22,8	3,94

Tabelle B.

	Frequenz n	Ausschlag	red. Ausschlag S_n	S_n/S_{500}	S_n/S_{220}
10 M.A.	508	5,25	2,03	1,000	3,82
	720	6,6	1,272	0,627	2,40
	846	8,2	1,143	0,564	2,15
11 M.A.	508	6,46	2,50	1,000	3,82
	720	8,35	1,611	0,645	2,52
	846	10,30	1,438	0,575	2,19
12 M.A.	508	7,95	3,08	1,000	3,82
	720	10,25	1,96	0,636	2,49
	846	12,40	1,73	0,563	2,15
13 M.A.	508	9,75	3,78	1,000	3,82
	720	12,40	2,39	0,633	2,48
	846	15,40	2,15	0,569	2,175

Tabelle C.

	Frequenz n	Ausschlag	red. Ausschlag S_n	S_n/S_{500}	S_n/S_{220}
4,5 M.A.	378	4,0	2,8	1,00	2,128
	508	12,6	4,88	1,74	3,705
5,0 M.A.	378	5,4	3,78	1,00	2,128
	508	16,8	6,51	1,72	3,66
5,5 M.A.	378	7,0	4,9	1,00	2,128
	508	22,0	8,52	1,74	3,705
6,0 M.A.	378	9,1	6,37	1,00	2,128
	508	28,8	11,16	1,75	3,72

Die Tabelle A enthält die Ergebnisse der Phonometer-eichung von 220—508 Perioden. Die Eichung wurde ausgeführt bei den Telephonstromstärken 4,5; 5,0; 5,5 und 6,0 M.A. Die Bedeutung der einzelnen Spalten ist ohne weiteres klar. Die unter S_n angegebenen Zahlen sind entstanden aus denen in der zweiten Reihe durch Division mit n^2 . Die Potenz von 10, die eigentlich noch als Faktor hinzutreten müßte, ist fortgelassen, da sie sich bei Bildung der Verhältnisse S_n/S_{220} doch forthebt. Wir sehen, innerhalb der Beobachtungsfehler

stimmen die bei verschiedenen Telephonstromstärken gefundenen Werte für S_n/S_{220} ziemlich gut überein, der mittlere Fehler beträgt etwa 1,14—1,95 Proz.

In der Tabelle B sind die Ergebnisse der Eichung für die Frequenzen 508—846 mitgeteilt. Auch hier stimmen die Werte S_n/S_{220} bei verschiedenen Stromstärken gut überein. Der mittlere Fehler beträgt hier 0,48—0,59 Proz.

Es wurde nun noch festgestellt, daß man mit Hilfe der beiden verschiedenen Membranen auch wirklich gleiche Werte S_n/S_{220} findet für die Frequenzen 378 und 508. In der Tabelle C ist das Verhältnis S_{378}/S_{508} mit Hilfe der kleinen Stahlmembran bestimmt worden. Man sieht, daß es übereinstimmt mit dem Wert, der mit Hilfe der Weicheisenmembran gefunden wurde.

Die Kurve in Fig. 6 ist das Ergebnis unserer Eichung. Man sieht, anfangs nimmt das Verhältnis S_n/S_{220} mit wachsender

Frequenz zu. Es erreicht bei etwas über 500 Perioden ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Diese Abnahme läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß bei diesen Frequenzen die Resonatoren stärker strahlen. Es wird ja die Resonatoröffnung im Verhältnis zu den übrigen Dimensionen des Resonators immer größer. Man müßte demnach das Maximum an einer anderen Stelle bekommen, wenn man die Resonatoröffnung anders dimensioniert.

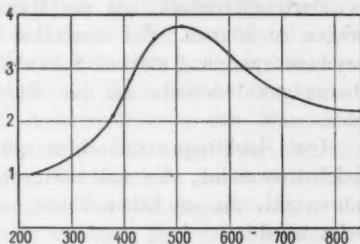


Fig. 6.
Eichkurve für die Resonatoren.

Zweiter Teil.

Schallintensität des tönenden Lichtbogens.

A. Versuchsanordnung.

1. Schaltung.

Dem mit Gleichstrom betriebenen Lichtbogen wurde der Wechselstrom einer Hochfrequenzmaschine überlagert. Die verwendete Schaltung zeigt die Fig. 7.

Der Lichtbogen wurde betrieben mit 220 Volt städtischer Spannung. Die Stromstärke wurde variiert zwischen 3 und

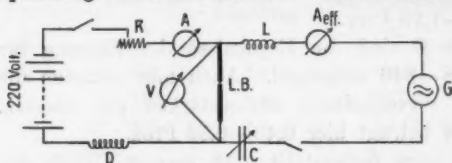


Fig. 7.

6 Amp. Um den Strom, den die Hochfrequenzmaschine *G* lieferte, sinusförmig zu machen, wurde in den Wechselstromkreis veränderliche Selbstinduktion *L* und Kapazität *C* eingeschaltet, die für jede Frequenz auf Resonanz abgestimmt wurden. Der Wechselstrom wurde gemessen mit einem Elektrodynamometer von Hartmann und Braun. Eine Drosselspule *D*, die in den Gleichstromkreis eingeschaltet wurde, sollte das Eintreten des Wechselstromes verhindern. Die Spannung der Hochfrequenzmaschine wurde im Verhältnis 430:112 heruntertransformiert, um die Maschine entsprechend stärker erregen zu können. Bei schwacher Erregung nämlich war die Maschinenspannung starken Schwankungen unterworfen, da die Übergangswiderstände an den Bürsten zu sehr ins Gewicht fielen.

Die Hochfrequenzmaschine wurde betrieben mit einem Gleichstrommotor, der mit städtischer Spannung (je nach der Tourenzahl, die er haben sollte, mit 220 oder 440 Volt) gespeist wurde.

Um die Tourenzahl der Maschine bequem regulieren zu können, wurde in den Ankerstromkreis des Motors ein variabler Widerstand eingeschaltet. Die Tourenzahl wurde gemessen mit einem Frequenzmesser von Hartmann und Braun, der an den Wechselstromschleifringen des Motors lag.

2. Lichtbogen.

Der Lichtbogen brannte zwischen zwei vertikal übereinandergestellten Kohlen, die in ein mit der Hand regulierbares Stativ eingespannt waren. Er stand in einem 50 mm weiten und 190 mm langen Messingrohr, um Störungen zu vermeiden, die die von den Zimmerwänden reflektierten Wellen hätten verursachen können. In der Mitte des Rohres befand sich gegenüber dem Lichtbogen eine 13 mm weite Öffnung, vor die

der F
Glimm
Linse
papier
zu k
jeder
aus d
rang
U

Veres
Licht
höher

I
stan
schlag
bekom
zunäc
sprech
kleiner
motors
allmäh
nanzpu
Phono
wurde
stärke
wie bei
Betrag
lieren.

1. A
Di
Rihl v
Einleit
Wechs
länge
wo A e

der Resonator gestellt wurde. Ferner war seitlich ein kleines Glimmerfenster angebracht, durch das hindurch mit Hilfe einer Linse ein Bild des Bogens auf einem Schirm von Koordinatenpapier entworfen wurde, um die Bogenlänge bequem messen zu können. Es wurde so auch kontrolliert, ob der Bogen jederzeit dieselbe Stellung hatte. Eine Verrückung des Bogens aus der Mitte des Rohres bis zu etwa 3 mm hatte keine Änderung des Phonometerausschlages zur Folge.

Um eine zu starke Erwärmung des Resonators, die eine Verschiebung der Resonanzstelle zur Folge hatte, durch den Lichtbogen zu vermeiden, wurde der Resonator, wenigstens bei höheren Frequenzen, mit einer Wasserkühlung versehen.

B. Messungen am Lichtbogen.

Da es sehr schwer möglich war, die Maschine auf konstanter Tourenzahl zu halten, wurde, um den maximalen Ausschlag des Phonometers bei einer bestimmten Frequenz zu bekommen, folgendermaßen verfahren. Man ließ die Maschine zunächst etwas schneller laufen, als der Frequenz des entsprechenden Resonators entsprach. Dann wurde plötzlich ein kleiner Widerstand in den Ankerstromkreis des Maschinenmotors eingeschaltet, so daß sich die Tourenzahl der Maschine allmählich verringerte. Wenn die Maschine durch den Resonanzpunkt hindurchlief, konnte der Maximalausschlag des Phonometers bequem abgelesen werden. In demselben Moment wurde auch die Bogenlänge abgelesen. Die Wechselstromstärke ließ sich im allgemeinen vorher so einregulieren, daß sie beim Durchgang durch die Resonanzstelle den gewünschten Betrag hatte. Ebenso war die Gleichstromstärke gut zu regulieren.

1. Abhängigkeit der Schallintensität von der Bogenlänge.

Die Untersuchung dieser Abhängigkeit wurde bereits von Rühl vorgenommen. Er hatte gefunden, wie schon in der Einleitung erwähnt worden ist, daß bei rein sinusförmigem Wechselstrom zwischen der Schallintensität S und der Bogenlänge l des Lichtbogens die Beziehung besteht

$$S = A \cdot l^2,$$

wo A eine Konstante ist.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Untersuchung dieser Abhängigkeit ausgedehnt auf verschiedene Frequenzen. Fig. 8 gibt die Messungen wieder, die ausgeführt wurden bei einer

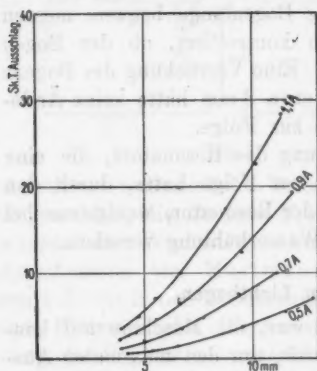


Fig. 8. Frequenz 220. Dochkohle.

Fig. 9. zeigt eben solche Messungen, die ausgeführt

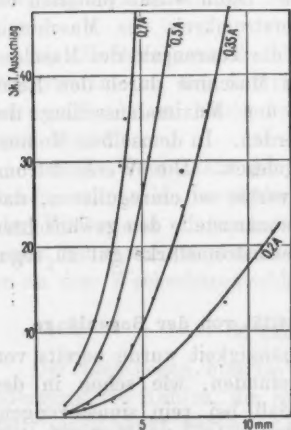


Fig. 9. Frequenz 720. Homogenkohle.

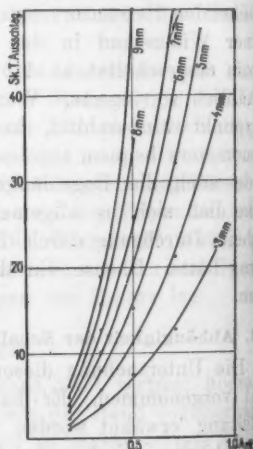


Fig. 10. Frequenz 457. Dochkohle.

wurden an Homogenkohlen bei der Frequenz 720. Die Gleichstromstärke betrug ebenfalls 3,0 Amp., die Wechselstromstärke

Periodenzahl von 220. Der Lichtbogen brannte zwischen zwei Dochkohlen von der Dicke 15 mm (positiv) und 10 mm (negativ). Die Gleichstromstärke betrug 3,0 Amp. Die Wechselstromstärke wurde verändert zwischen 0,5 A_{eff.} und 1,1 A_{eff.}

Als Abszissen sind die Bogenlängen in Millimetern aufgetragen, als Ordinaten die Ausschläge des Phonometers. Die Kurven sind Parabeln mit ihrem Scheitel im Nullpunkt.

wurde variiert zwischen $0,2 A_{\text{eff.}}$ und $0,7 A_{\text{eff.}}$. Als Abszisse ist wieder die Bogenlänge in Millimetern, als Ordinate der Ausschlag des Phonometers aufgetragen.

2. Abhängigkeit der Schallintensität von der Wechselstromstärke.

Auch diese Abhängigkeit ist bereits von Rihl untersucht und hier nur wieder auf andere Frequenzen ausgedehnt worden. In Fig. 10 und Fig. 11 sind solche Messungen mitgeteilt

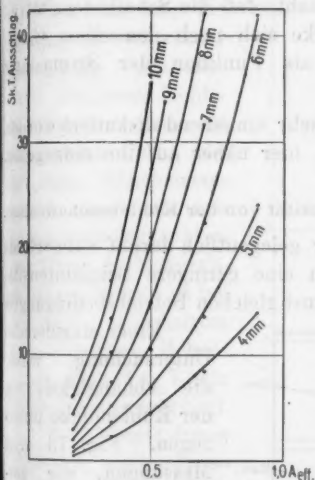


Fig. 11. Frequenz 457. Homogenkohle.

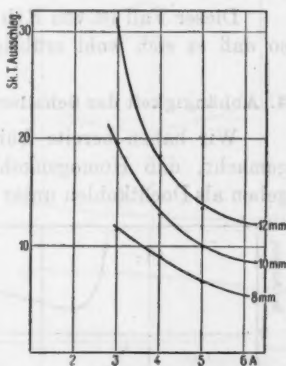


Fig. 12.

für Docht- und Homogenkohle, die ausgeführt wurden bei der Frequenz 457. Die Bogenlänge wurde variiert zwischen 3 mm und 10 mm, die Wechselstromstärke zwischen $0,2 A_{\text{eff.}}$ und $0,9 A_{\text{eff.}}$. Die Gleichstromstärke betrug 3,0 Amp.

Die Kurven sind Parabeln von der Form

$$S = C \cdot J_0^2,$$

wo J_0 der Scheitelwert des Wechselstromes ist. Diese Gesetzmäßigkeit wurde bereits von Rihl festgestellt.

Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß die Kurven für Homogenkohlen bedeutend tiefer liegen als diejenigen für Dichtkohle, daß also ein Lichtbogen zwischen Dichtkohlen wesentlich mehr Schallenergie aussendet unter sonst gleichen Betriebsbedingungen wie ein Lichtbogen zwischen Homogenkohlen.

3. Abhängigkeit der Schallintensität von der Gleichstromstärke.

Die Schallintensität bei konstanter Lichtbogenlänge und konstantem Wechselstrom als Funktion der Gleichstromstärke zeigt Fig. 12. Die Gleichstromstärke variiert zwischen 3,0 und 6,0 Amp., die Bogenlänge zwischen 8 mm und 12 mm. Der Wechselstrom ist konstant gleich 0,3 A_{eff.} Die Messungen wurden ausgeführt bei 457 Perioden. Der Lichtbogen brannte zwischen Dochkohlen. Man sieht, daß die Schallintensität als Funktion der Gleichstromstärke sich nach demselben Gesetz ändert, wie die Spannung als Funktion der Stromstärke (statische Charakteristik).

Dieser Fall ist von Rihl sehr eingehend diskutiert worden, so daß es sich wohl erübrigt, hier näher auf ihn einzugehen.

4. Abhängigkeit der Schallintensität von der Kohlebeschaffenheit.

Wir haben bereits früher gelegentlich darauf aufmerksam gemacht, daß Homogenkohlen eine geringere Schallintensität geben als Dochkohlen unter sonst gleichen Betriebsbedingungen.

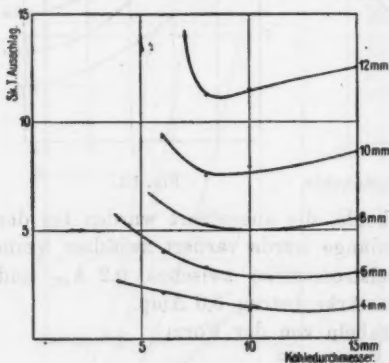


Fig. 13.

Gleichstrom = 6,0 Amp.
Wechselstrom = 0,3 A_{eff.}
Frequenz 457.

Frequenz war 457. Als Abszisse ist der Kohledurchmesser aufgetragen, als Ordinate der entsprechende Phonometerausschlag.

Einer eingehenden Untersuchung wurde die Abhängigkeit von der Kohlendicke unterzogen. Fig. 13 zeigt Messungen, die ausgeführt wurden an Dochkohlen verschiedener Dicke. Der Kohledurchmesser variierte von 4 mm bis 15 mm, die Bogenlänge von 4 mm bis 12 mm. Der Gleichstrom war konstant gleich 6,0 Amp., die Wechselstromstärke betrug 0,3 A_{eff.} Die

Wir sehen, daß die Schallintensität bei einem bestimmten Kohledurchmesser ein Minimum ist. Dieses Minimum rückt mit wachsender Bogenlänge zu kleineren Kohledurchmessern.

In Fig. 14 sind die entsprechenden Kurven bei 3,0 Amp. Gleichstrom eingetragen. Die übrigen Betriebsbedingungen waren dieselben wie vorher. Bei 4 mm Bogenlänge liegt hier das Minimum noch außerhalb des Bereiches, in dem gemessen wurde. Im übrigen schieben sich hier die Minima bei wachsender Bogenlänge schneller nach kleineren Kohledurchmessern hin als im vorigen Fall. Bei 6,0 Amp. Gleichstromstärke und 10 mm Bogenlänge liegt es etwa bei 9 mm Kohledurchmesser, während es bei 3,0 Amp. Gleichstrom und derselben Bogenlänge etwa bei 7 mm Kohledurchmesser liegt.

Man könnte dieses Minimum vielleicht so erklären: Von der dem Lichtbogen zugeführten Wechselstromenergie wird ein Teil in Schallenergie umgesetzt, während ein anderer Teil in Wärmeenergie umgesetzt wird.

Die Wärme wird abgeführt durch Leitung und Strahlung. Die Verluste durch Leitung sind um so größer, je größer der Kohlequerschnitt ist, nehmen also mit wachsendem Kohledurchmesser zu (s. Fig. 15). Die Kurven sind in der Figur willkürlich angenommen. Umgekehrt ist es bei den Verlusten durch Strahlung. Die Strahlung ist größer bei dünnen Kohlen als bei dicken, da bei dünnen Kohlen die Oberfläche relativ größer ist. Die Verluste durch Strahlung nehmen also mit

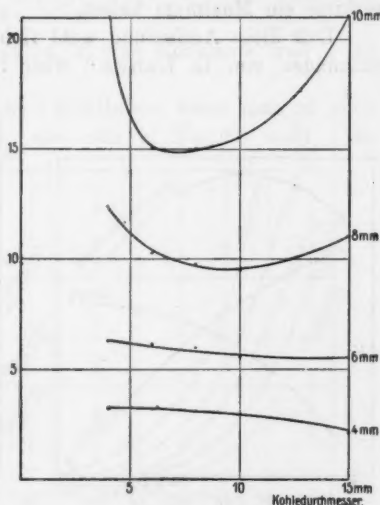


Fig. 14.

Gleichstrom = 3,0 Amp.

Wechselstrom = 0,8 Aeff.

Frequenz 457.

wachsendem Kohledurchmesser ab (vgl. Fig. 15). Der gesamte Wärmeverlust ergibt sich durch Addition der Leitungs- und Strahlungsverluste. Er erreicht, wie man aus der Figur sieht, bei einer bestimmten Kohlendicke ein Maximum. Da die Schallenergie gleich ist der Differenz zwischen der dem Bogen zugeführten Wechselstromenergie und der abgeführten Wärmeenergie, muß sie also dort ein Minimum haben, wo die Wärmeverluste ein Maximum haben.

Daß diese Auffassung wohl richtig ist, bestätigen Untersuchungen von G. Lange¹⁾ über Lichtbogenhysteresis. Mit

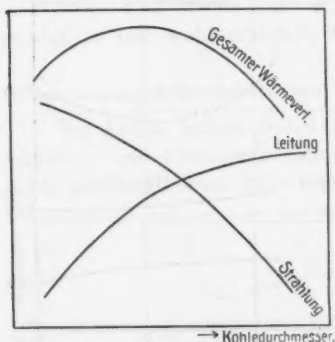


Fig. 15.

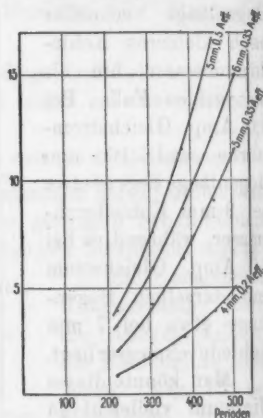


Fig. 16.

einer Vergrößerung der Wärmeabfuhr wird die Hysteresis verkleinert, und damit rücken die Zündspitzen des Bogens in die Höhe. G. Lange fand, daß die Höhe der Zündspitze bei einer gewissen Kohlendicke ein Maximum erreicht.

5. Abhängigkeit der Schallintensität von der Frequenz des überlagerten Wechselstromes.

Das Hauptziel der vorliegenden Untersuchung war, die Abhängigkeit der Schallintensität von der Frequenz des überlagerten Wechselstromes festzustellen.

Diese Abhängigkeit ist dargestellt in den Kurven der Fig. 16. Die Kurven wurden aufgenommen für verschiedene

1) Gertrud Lange, Diss. Göttingen. 1909.

Bogenlängen und Wechselstromstärken. Als Abszisse ist die Periodenzahl, als Ordinate der reduzierte Ausschlag aufgetragen. Die Frequenz wurde bei dieser Meßreihe variiert zwischen 220 und 508 Perioden pro Sekunde. Der Lichtbogen brannte zwischen Dochkohlen. Die Kurven fallen sehr gut mit Parabeln zusammen, die durch den Nullpunkt hindurchgehen und die Form haben

$$(1) \quad S = C \cdot n^2,$$

wo S der reduzierte Ausschlag, C eine Konstante und n die Frequenz bedeutet.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man zu noch höheren Frequenzen geht, wie man in Fig. 18 sieht. Die

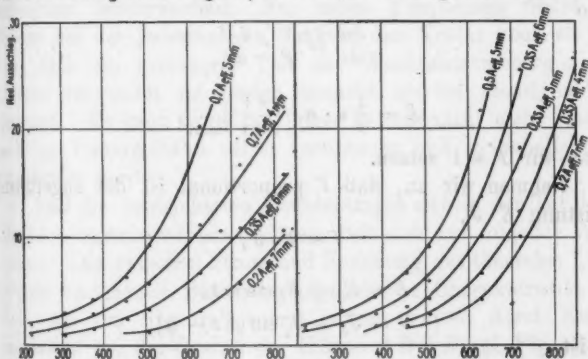


Fig. 17.

Fig. 18.

Frequenz wurde variiert bis 846 Perioden, die Wechselstromstärke zwischen $0,2 A_{\text{eff}}$ und $0,5 A_{\text{eff}}$ und die Bogenlänge von 4 mm bis 7 mm. Die Kurven lassen sich darstellen durch den Ausdruck

$$(2) \quad S = a n^2 + b n^4.$$

Man kann sie sich also entstanden denken durch Übereinanderlagerung einer gewöhnlichen und einer Parabel vierter Ordnung. Das Glied $b \cdot n^4$ rührt, wie wir später sehen werden, vom Einfluß der Hysteresis her, die sich auch bei der Veränderung des Kohledurchmessers bemerkbar machte.

Endlich sind auf Fig. 17 noch die Ergebnisse der Messungen an Homogenkohlen festgelegt. Auch hier ist die Ab-

hängigkeit der Schallintensität von der Frequenz rein quadratisch etwa bis zu 500—600 Perioden, während für höhere Frequenzen die Formel (2) gilt.

C. Diskussion der Ergebnisse.

Treten wir nun in die Diskussion der gewonnenen Ergebnisse ein. Durch die Oberfläche F des Lichtbogens tritt in der Zeiteinheit die Energie hindurch

$$\frac{1}{2} c \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\max}^2 \cdot F^1,$$

oder da

$$F du = dV,$$

also

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{F} \cdot \frac{dV}{dt}$$

ist,

$$E = \frac{1}{2} c \cdot \sigma \cdot \left(\frac{dV}{dt} \right)_{\max}^2,$$

wenn wir $F = 1$ setzen.

Nehmen wir an, daß V proportional ist der zugeführten Leistung $E \cdot J$,

$$V \sim E \cdot J,$$

wo

$$E = E_0 + E_1 \sin \omega t,$$

$$J = J_0 + J_1 \sin(\omega t - \varphi),$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= C \cdot \omega \{ J_0 E_1 \sin \omega t + E_0 J_1 \cos(\omega t - \varphi) \\ &\quad + E_1 J_1 \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) \\ &\quad + E_1 J_1 \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi) \}. \end{aligned}$$

Nun sind E_1, J_1 gegen E_0, J_0 klein, so daß wir die Ausdrücke, die das Produkt $E_1 \cdot J_1$ enthalten, vernachlässigen können und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= C \cdot 2 \pi n \{ J_0 E_1 \sin \omega t + E_0 J_1 \cos(\omega t - \varphi) \} \\ &= C_1 \cdot D \sin(\omega t - \psi). \end{aligned}$$

Mithin ist

$$E = c \cdot D^2 \cdot n^2,$$

1) Vgl. auch W. Rühl, Ann. der Phys. 36. p. 677. 1911.

und wenn wir D konstant halten, so bekommen wir also das Resultat, daß die von dem Lichtbogen ausgesandte Schallenergie proportional ist dem Quadrat der Frequenz des übergelagerten Wechselstromes. Und damit stehen die Ergebnisse, die wir durch Messung gewonnen haben, im Einklang, wenigstens so lange es sich nicht um hohe Frequenzen handelt.

Gelangt man zu höheren Frequenzen, so bedingt die Lichtbogenhysteresis Abweichungen von diesem einfachen Gesetz. Um den Lichtbogen zu unterhalten, muß ein Teil der Wechselstromenergie zum Heizen der Krater, besonders des negativen, verwendet werden. Bei niedriger Periodenzahl kühlen sich nun die Krater während des Stromwechsels mehr ab als bei schnellem Stromwechsel. Bei hohen Frequenzen findet der Strom bei der jedesmaligen Umkehr den Krater noch so heiß vor, daß ein geringerer Teil der Wechselstromenergie zum Heizen verwendet zu werden braucht als bei niedrigen Frequenzen. Es kann daher bei hoher Periodenzahl mehr Energie auf der Leitungsbahn selbst verbraucht und in Schallenergie umgesetzt werden.

Daß die beobachteten Abweichungen sich in der Tat durch die Lichtbogenhysteresis erklären, läßt sich auf folgende Weise zeigen: Die zwischen Strom und Spannung des tönenden Lichtbogens bestehende Beziehung (dynamische Charakteristik) läßt sich, wie von Simon¹⁾ zuerst gezeigt wurde, durch Kurven darstellen von der Gestalt der Ellipse $ADBF$ (vgl. Fig. 19), die sich der Gleichstromcharakteristik überlagert. (Die statische Charakteristik ist in der Figur nicht gezeichnet.)²⁾ Simon hat untersucht, wie sich bei sonst gleichen Verhältnissen die Charakteristik ändert, wenn die Frequenz gesteigert wird. Er hat gefunden, daß die Charakteristik sich bei wachsender Frequenz aus der in der Figur gezeichneten Lage im entgegen gesetzten Uhrzeigersinn herausdreht und mehr und mehr in eine steigende übergeht. Diese Ellipsen kann man sich entstanden denken durch Übereinanderlagerung einer durch den Punkt $J_0 \cdot E_0$ gehenden Geraden AB und einer symmetrisch zu den Koordinatenachsen gelegenen Ellipse $CFED$. Die Gerade AB re-

1) H. Th. Simon, Physikal. Zeitschr. 6. p. 297. 1905.

2) Näheres s. H. Th. Simon, l. c.

präsentiert einen Energieverbrauch im Bogen, wie er einem Ohmschen Widerstande entspricht, während die Ellipse $CFED$ einer Selbstinduktion entspricht, wenn sie im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und einer Kapazität, wenn sie entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Hiernach können wir den Gleichstromlichtbogen mit übergelagertem Wechselstrom auffassen als einen Widerstand mit vorgeschalteter Selbstinduktion oder als einen Widerstand mit vorgeschalteter Kapazität.¹⁾

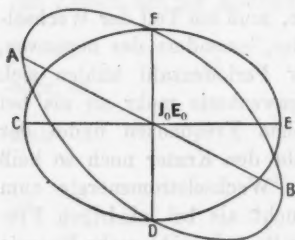


Fig. 19.

Wir wollen nun die Hysteresis als Selbstinduktion berücksichtigen.²⁾ Die am Bogen wirkende Spannung

$$E = E_0 + E_1 \sin \omega t$$

hat den Ohmschen Spannungsabfall im Bogen

$$(J_0 + J_1 \sin \omega t) \cdot w$$

und die genelektromotorische Kraft der Selbstinduktion

$$\lambda \cdot \frac{dJ}{dt} = \lambda \omega \cdot J_1 \cos \omega t$$

zu überwinden. Es besteht die Beziehung

$$E_0 + E_1 \sin \omega t = (J_0 + J_1 \sin \omega t) \cdot w + \lambda \cdot \omega J_1 \cos \omega t.$$

Die im Lichtbogen verbrauchte Leistung ist also

$$E \cdot J = (J_0 w + J_1 w \sin \omega t + \lambda \omega J_1 \cos \omega t) \cdot (J_0 + J_1 \sin \omega t),$$

oder wenn wir die mit J_1^2 behafteten Glieder vernachlässigen,

$$E \cdot J = J_0^2 w + 2 J_0 J_1 w \sin \omega t + \omega \lambda \cdot J_0 J_1 \cos \omega t.$$

Da $V \sim E \cdot J$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\sim 2 \omega J_0 J_1 w \cos \omega t - \omega^2 \lambda \cdot J_0 J_1 \sin \omega t \\ &\sim \omega D_1 \cos \omega t + \omega^2 D_2 \cos \left\{ \omega t - \frac{\pi}{2} \right\} \\ &\sim \sqrt{\omega^2 D_1^2 + \omega^4 D_2^2} \sin(\omega t - \psi). \end{aligned}$$

1) W. Rühl, l. c.

2) H. Th. Simon, Physikal. Zeitschr. 7. p. 433. 1906.

$$S \sim \left(\frac{dV}{dt} \right)_{\max}^2.$$

$$S = a(D_1^2 \omega^2 + D_2^2 \omega^4).$$

Bei den von uns gewählten Betriebsbedingungen waren D_1 und D_2 konstant, also

$$S = a n^2 + b n^4.$$

So kommen wir zu folgendem Ergebnis:

Die akustischen Erscheinungen am Lichtbogen werden hervorgerufen durch periodische Schwankungen des Flammenbogensvolumens. Ob diese Schwankungen herrühren von der Änderung der Wärmeentwicklung auf der Leitungsbahn oder der Dissoziation des Elektrodengases, läßt sich nicht entscheiden. Da eine Begünstigung der Umstände, welche eine größere Schwankung der Kohleverdampfung bewirken, also eine Verringerung der Hysteresis, eine *Abnahme* der Schallintensität zur Folge hat, können die akustischen Wirkungen nicht von den periodischen Schwankungen der Verdampfung herrühren. Die Zunahme der Hysteresis hat eine Vergrößerung des Verhältnisses der in der Leitungsbahn verbrauchten zu der dem Anoden- und Kathodenfall entsprechenden elektrischen Energie zur Folge. Dadurch erklärt sich die Zunahme der Schallintensität mit wachsender Hysteresis.

Zusammenfassung.

Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Messungen über die Schallintensität des tönenden Lichtbogens haben ergeben:

1. Die von Rihl gemachten Untersuchungen über die Abhängigkeit der Schallintensität von der Bogenlänge, von der Wechselstromstärke und der Gleichstromstärke wurden auf den Frequenzbereich 220—846 Perioden ausgedehnt und bestätigt. Die Schallintensität des tönenden Lichtbogens ist proportional dem Quadrat der Bogenlänge; sie ist ferner proportional dem Quadrat der Wechselstromstärke. Bei konstanter Bogenlänge und konstanter Wechselstromstärke ist die Schallintensität proportional der Gleichspannung am Lichtbogen.

2. Die Abhängigkeit der Schallintensität von dem Kohledurchmesser erreicht bei einer bestimmten Kohlendicke ein Minimum. Die Lage des Minimums ist abhängig von der Bogenlänge und von der Stromstärke.

3. Die Abhängigkeit der Schallintensität von der Frequenz des übergelagerten Wechselstromes ist für Frequenzen bis etwa 500 Perioden quadratisch. Für höhere Frequenzen tritt infolge des Einflusses der Hysteresis ein Glied hinzu, das proportional ist der vierten Potenz der Frequenz.

Aus diesen Messungen geht hervor, daß die akustischen Wirkungen am Lichtbogen hervorgerufen werden durch periodische Veränderungen des Flammenbogenvolumens, wobei dahingestellt bleibt, ob diese Veränderungen herrühren von den Schwankungen der Wärmeentwicklung auf der Leitungsbahn oder der Dissoziation des Elektrodengases oder einer Überlagerung beider.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Professor Simon im Institut für angewandte Elektrizität in Göttingen ausgeführt.

Ich möchte es nicht versäumen, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Simon, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und das stets rege Interesse an ihrem Fortgange. Auch Herrn Dr. Busch, dem Assistenten des Instituts, bin ich für manchen Rat und Unterstützung zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen 24. Juli 1913.)

u
(A
der A
perat
vorzu
treffe
mit
strun
ein s
Empf
schle
perat
in vi
eines
strun
zeitig
dyna
steht
und
Subs
aus,
besch
abge
von
trägt
sehen
könn
p. 20

**12. Über Dampfdruckmessungen
und Thermometrie bei tiefen Temperaturen;
von H. v. Siemens.**

(Aus dem physikalisch-chemischen Institut der Universität Berlin.)

Auf Veranlassung von Hrn. Prof. Nernst habe ich mich der Arbeit unterzogen, auf verschiedenen Gebieten tiefer Temperaturen Dampfdruckmessungen nach der statischen Methode vorzunehmen. Dabei war die Substanz dauernd in den betreffenden Apparat eingeschlossen und vor jeder Verbindung mit der Außenwelt völlig abgeschnitten. Ein derartiges Instrument ist, einmal geeicht, immer gebrauchsfertig und bildet ein sehr bequemes Thermometer für tiefe Temperaturen. Die Empfindlichkeit ist sehr groß, weil der Dampfdruck in stark beschleunigtem Maße mit der Temperatur wächst; und eine Temperatur ist durch den Dampfdruck einer völlig reinen Substanz in viel exakterer Weise definiert, als durch den Widerstand eines Platindrahtes oder ein Thermoelement, weil letztere Instrumente immer individuelle Verschiedenheiten zeigen. Gleichzeitig hat die Bestimmung der Dampfdruckkurven auch thermodynamisches Interesse, da der Sättigungsdruck in Beziehung steht mit der Verdampfungswärme und der spezifischen Wärme, und da er ferner die chemische Konstante der untersuchten Substanz liefert. Die erste Anregung hierfür ging von Stock¹⁾ aus, welcher auch ein Dampfdruckthermometer mit Sauerstoff beschrieben hat.

Das Instrument wurde für den vorliegenden Zweck etwas abgeändert. Insbesondere wurde ein geschlossenes Manometer von 10 mm lichter Weite verwendet, das eine Millimeterskala trägt. Der Vakuumschenkel wurde mit einer Luftfalle versehen, um immer wieder ein absolutes Vakuum herstellen zu können. Zwischen den anderen Schenkel und das dünnwandige

1) A. Stock u. C. Nielsen, Ber. d. Deutsch. Chem. Ges. **39.** (II), p. 2066. 1906.

Kondensationsrohr ist ein waschflaschenartiges Gefäß eingeschaltet, welches dem Innenraum ein größeres Volumen erteilt und das Einfüllen unter Überdruck sowie ein Hin- und Her-

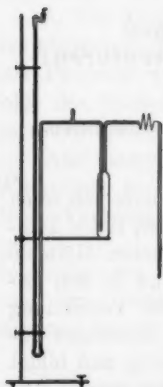


Fig. 1.

destillieren der einzufüllenden Substanz zur weiteren Reinigung ermöglicht. Vor dem Kondensationsrohr befindet sich wie bei Stock eine Glasspirale. Das Ganze ist aus Glas aus einem Stück angefertigt und wird durch einen Seitenansatz gefüllt, der dann abgeschmolzen wird (Fig. 1).

Es wurden untersucht: Schwefelkohlenstoff, Kohlensäure, Sauerstoff und Stickstoff. Da sich bei statischen Dampfdruckmessungen Verunreinigungen sehr störend bemerkbar machen, wurde auf Reindarstellung besonderer Wert gelegt.

Schwefelkohlenstoff „Kahlbaum“ wurde mit Quecksilber und Phosphorpentoxyd gründlich durchgeschüttelt und in einen Kolben gefüllt, der mit dem zu füllenden Instrument und der Toeplerpumpe in Verbindung stand. Hier wurde er durch Abpumpen allmählich verdampft, während immer Stichproben in den Apparat destilliert, von Luft befreit und auf ihren Dampfdruck in schmelzendem Eise untersucht wurden. Zwischen dem ersten und zweiten Drittel der abgepumpten Portion blieb der Druck völlig konstant, es wurde auch festgestellt, daß die im Apparat befindliche Probe durch Abpumpen auf die Hälfte ihren Druck nicht änderte. Wichtig ist das Entfernen jeglicher Luft, welches durch Einfrieren mit flüssiger Luft und Auspumpen erfolgte.

Kohlensäure wurde einem Kippischen Apparate entnommen und mit doppeltkohlensaurem Natrium, Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd gewaschen und getrocknet. Die so erhaltene Substanz ist noch lufthaltig und nimmt beim Erstarren etwas davon mit. Die Luft mußte deshalb entfernt werden, indem die Kohlensäure mehrmals im Apparat hin und her sublimiert wurde. Jedesmal wurde sie dann mit flüssiger Luft abgekühlt und der Apparat evakuiert. Nach dreimaliger Wiederholung dieser Operation wurde keine Luft mehr abgegeben.

Sauerstoff wurde durch Erhitzen von Kaliumpermanganat in einem völlig evakuierbaren System entwickelt und über Natronkalk und Phosphorpentoxyd geleitet. Da in genanntem Salz der Sauerstoff das einzig mögliche flüchtige Produkt ist, entsteht er sofort in völliger Reinheit. Um Zersetzungsprodukte von etwa vorhandenem Staub zu vermeiden, wurden die zuerst entwickelten Portionen verworfen.

Stickstoff wurde aus einer konzentrierten Lösung von Natriumnitrit und Ammoniumsulfat auf dem Wasserbade zwischen 40 und 50° entwickelt unter Vermeidung überflüssig großer Gefäßvolumina und Sackgassen. Er wurde durch Natronlauge und Schwefelsäure geleitet, in einem Verbrennungsröhre mit glühendem Kupferdraht von Stickoxyden befreit und mit Phosphorpentoxyd getrocknet. Die Füllung wurde erst vorgenommen, nachdem das Ganze lange Zeit durchgespült war. Zur Beurteilung der Reinheit des Produktes dient erstens der Dampfdruck im Schmelzpunkt, der in Übereinstimmung mit v. Estreicher¹⁾ zu 93,5 mm [Fischer und Alt²⁾ 94,0 mm] gefunden wurde, und zweitens der Sauerstoff-Dampfdruck beim Siedepunkt des Stickstoffs. Dieser Druck ergibt sich aus der von Stock mit seinem Sauerstoffthermometer gefundenen Siedetemperatur des letzteren, aus welcher der Sauerstoffdampfdruck zurückberechnet wurde. Auch hier war die Übereinstimmung eine vollkommene.

Besondere Vorsicht war bei Verwendung der Temperaturbäder geboten. Sie müssen eine große zeitliche und räumliche Konstanz haben; besonders dürfen sie nicht oben kälter sein als unten, weil das Kondensationsrohr durch die Oberfläche durchgeführt werden muß und der Dampf sich immer im kältesten Punkte kondensiert. Ist das Bad oben wärmer als unten, so verdichtet sich die Substanz ganz unten. Wird das untere Ende des Kondensationsrohres dann auf gleiche Höhe mit dem Thermometer gebracht, so werden beide Instrumente gleich zeigen müssen. Unter konstantem Druck siedende Flüssigkeiten zeigen immer das schädliche Temperaturgefälle und sind deshalb nur unter besonderen Vorsichtsmaßregeln anwendbar. Das bedingt erstens der Siedeverzug im Innern, während sich die Phasengrenzfläche sofort ins Gleichgewicht setzt, und zwei-

1) Th. v. Estreicher, Anz. Akad. Wiss. Krakau 1903, p. 831.

2) K. T. Fischer u. H. Alt, Ann. d. Phys. 9. p. 1149. 1902.

tens der hydrostatische Druck der oberen Schichten, welcher den Siedepunkt der tieferen erhöht. Es wurden folgende Bäder verwendet:

1. Für Schwefelkohlenstoff wurde Alkohol mit Kohlensäureschnee auf die gewünschte Temperatur abgekühlt und mit einem gläsernen Handrührer kräftig gerührt. Während der Ablesung wurde nicht gerührt. Die Temperatur blieb sehr konstant, weil die zugeführte Wärme von der Oberfläche aufgenommen wurde, was, wie oben ausgeführt, unschädlich ist.

2. Für Kohlensäure wurden die höchsten Temperaturen hergestellt durch eine dünnflüssige Kohlensäure-Alkoholmischung, die durch einen mechanisch getriebenen Schraubentrührer heftig gerührt wurde. Gestattet man zu diesem Bad der Luft Zutritt, so kühlt es sich durch Verdampfen an der Oberfläche langsam ab, während die Rührung für genügende Mischung sorgt. Vor der Ablesung wird der Rührer abgestellt und das Bad erwärmt sich wie vorhin von der Oberfläche her. Dies Bad ist brauchbar bis einige Grade unter dem Siedepunkt.

3. Tiefere Temperaturen werden erzeugt, indem ein Kupferblock in ein Dewargefäß hineingehängt wurde, in welchem sich etwas flüssige Luft befand. Der Boden des Blockes wurde von derselben angestrahlt, während Seitenwände und Oberfläche durch Watte vor Erwärmung geschützt waren. Der Block enthielt eine Bohrung, die mit Alkohol oder Pentan gefüllt wurde und die Meßinstrumente aufnahm. Dieser Block erfüllt die verlangten Bedingungen infolge seiner großen Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit und hat die wärmere Seite oben. Eine merkliche Temperaturdifferenz im Innern konnte übrigens nicht festgestellt werden. Der Temperaturgang kann durch Heben oder Senken des Gefäßes mit der flüssigen Luft reguliert werden.

4. Für Sauerstoff und Stickstoff mußte flüssige Luft bzw. flüssiger Sauerstoff verwendet werden. Unter Atmosphärendruck siedend, können sie mit einem ringförmig umgebogenen Glasrührer oder mittels Durchblasen von Luft gerührt werden. Ersetzt man die eingeblasene Luft durch Wasserstoff, so tritt eine Abkühlung ein, und die Temperatur läßt sich durch die Stärke des Gasstromes regulieren. Wurde der Wasserstoff vorgekühlt, und dann durch einen doppelwandigen versilberten Heber auf den Boden des Bades geleitet, so konnte flüssiger

Sauerstoff auf 80° abs. und flüssige Luft auf 67° abs. abgekühlt werden.

5. Für tiefere Temperaturen mußte die flüssige Luft abgepumpt werden. Hierbei treten die schädlichen Einflüsse des Siedeverzuges und des hydrostatischen Druckes in immer steigendem Maße auf. Auch Ansaugen von Wasserstoff, ähnlich wie bei einer Vakuumdestillation, genügte nicht zur Rührung. Es wurde daher folgender Apparat konstruiert, der bei allen Temperaturen zwischen 90 und 57° abs. gleich gut funktioniert und in dem die definitiven Messungen ausgeführt sind (Fig. 2).

Auf ein Dewargefäß von 40 cm Höhe und $5\frac{1}{2}$ cm lichter Weite wird ein Gummistopfen aufgesetzt, durch welchen ein reagensglasartiges Rohr aus Jenaer Glas von 40 cm Länge und 3 cm lichter Weite durchgeführt ist. Neben diesem Rohr, und durch Führungen an dasselbe festgehalten, verläuft ein Schraubenrührer, dessen Stiel mit der Achse einer Stopfbuchse verbunden ist, die durch den Gummistopfen hindurchgeht. Dieser enthält noch zwei Glasröhren zum Abpumpen und Nachfüllen von flüssiger Luft. In das große Rohr werden zwei Stahlröhren mit Boden, in der richtigen Höhe aneinander gewürgt, hineingesetzt und der Zwischenraum zwischen Eisen und Glas mit Quecksilber oder Blei ausgegossen. Die beiden Stahlröhren sind so weit gewählt, daß sie das Thermometer und das Kondensationsrohr mit geringem Spielraum umschließen. Die Achse der Stopfbuchse kann durch ein aufgesetztes Treibrad von einem Motor gedreht werden. Sind die Instrumente in die Röhren eingesetzt, so wird ein Glasrohr zum Einleiten von Wasserstoff bis auf die Oberfläche des Metallblocks eingesenkt und der verbleibende Hohlraum sorgfältig mit Watteschneitzeln ausgefüllt.

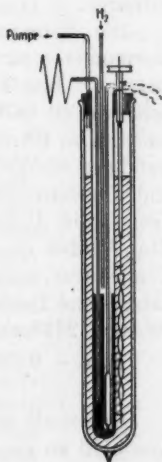


Fig. 2.

Dieser Apparat funktioniert folgendermaßen: Die im Dewargefäß enthaltene flüssige Luft wird durch Abpumpen gekühlt und gleichzeitig stark gerührt. Der durch die mäßig leitende Glaswand von der Flüssigkeit getrennte, gut leitende Metall-

block gleicht die geringen noch verbleibenden Temperaturunterschiede völlig aus. Der über den Block geleitete Wasserstoff verhindert die Außenluft, in das Glasrohr hineinzustürzen und sich dort zu kondensieren, und sorgt für guten Wärmekontakt zwischen Instrumenten und Stahlröhren. Der Apparat hat außerdem den Vorzug, daß man nicht genötigt ist, dünnwandige Glasteile luftdicht durch den Gummistopfen hindurchzuführen.

Die Temperatur wurde mit einem Platin-Widerstandsthermometer an einer Wheatstoneschen Stöpselbrücke gemessen. Ein Platindraht ist auf einem Glimmerkreuz lose aufgewickelt und mit Zuleitungen aus dickem Silberdraht versehen. Das Glimmerkreuz und die Zuleitungen sind in ein dünnwandiges Glasgefäß eingeschlossen, das mit Wasserstoff gefüllt und abgeschmolzen ist. Als Grundlage für die Thermometrie dienen die Untersuchungen von Kamerlingh Onnes und Clay¹⁾ über die Abhängigkeit des Platinwiderstandes von der Temperatur, insbesondere der Widerstand seines Pt₁. Es wurden daher seine Punkte zu einer Kurve vereinigt, die sich zwischen 100 und 273° abs. durch die Formel ausdrücken läßt:

$$w_1 = -0,15061 + 0,46513 \cdot T/100 - 0,02266 \cdot (T/100)^2 + 0,002424 \cdot (T/100)^3.$$

Unterhalb dieser Temperatur wurde sie unter möglichstem Anschluß an die Beobachtungen so ausgezogen, daß die beiden ersten Differentialquotienten einen regelmäßigen Verlauf zeigten, nach oben in die berechneten und nach unten in die von Nernst²⁾ ermittelten Werte übergingen. Die Kurve entfernt sich von den Beobachtungen nicht weiter als 0,02°, in einem Falle um 0,03°, was der Genauigkeit der Beobachtungen durchaus entspricht. In einer neueren Arbeit hat Henning³⁾ eine Widerstandskurve veröffentlicht, die sich gut an die von Kamerlingh Onnes anschließen läßt, aber zwischen 200 und 273° einen etwas anderen Verlauf zeigt. Die größte Abweichung beträgt 0,04°. Da hier der Anschluß an die bei höherer Temperatur gültige Callendarsche Formel hergestellt ist, so wurde in diesem Bereich die Widerstandskurve des Pt₁ in Anlehnung an die Henningsche Kurve ausgezogen (Tabb. I und II).

1) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Leiden Comm. 99. p. 10. 1907.

2) W. Nernst, Ann. d. Phys. 36. p. 395. 1911.

3) F. Henning, Ann. d. Phys. 40. p. 639. 1913.

Tabelle I.

Widerstand des Pt₁ von Kamerlingh Onnes.

T	w_1	$10^3 \cdot \frac{dw_1}{dT}$	T	w_1	$10^3 \cdot \frac{dw_1}{dT}$
56	0,10834	3,96	160	0,54553	4,112
58	11634	4,04	165	56606	4,101
60	12448	4,10	170	58654	4,091
62	13273	4,15	175	60697	4,082
64	14107	4,18	180	62736	4,072
66	14947	4,21	185	64769	4,062
68	15791	4,23	190	66798	4,054
70	16639	4,24	195	68823	4,046
72	17488	4,251	200	70844	4,038
74	18338	4,258	205	72861	4,031
76	19190	4,262	210	74875	4,024
78	20043	4,266	215	76885	4,016
80	20896	4,268	220	78891	4,009
85	23031	4,271	225	80894	4,003
90	25167	4,270	230	82894	3,996
95	27300	4,265	235	84890	3,989
100	29431	4,258	240	86883	3,983
105°	31558	4,249	245	88873	3,977
110	33680	4,239	250	90860	3,971
115	35797	4,228	255	92844	3,965
120	37908	4,215	260	94825	3,959
125	40012	4,200	265	96803	3,954
130	42108	4,186	270	98779	3,948
135	44198	4,173	273,09	1,00000	3,946
140	46281	4,160	275	00752	3,943
145	48358	4,148	280	02722	3,937
150	50429	4,136	285	04689	3,931
155	52494	4,124	290	06653	3,924

Der Anschluß des benutzten Platindrahtes an Pt₁ geschah nach der Nernstschen Regel:

$$w = \frac{w_1 + \alpha}{1 + \alpha}; \quad \frac{dw}{dT} = \frac{1}{1 + \alpha} \cdot \frac{dw_1}{dT}.$$

w ist der Widerstand des benutzten, w_1 der des Standarddrahtes, wenn jedesmal der Widerstand in schmelzendem Eise gleich 1 gesetzt wird. α soll eine Konstante sein und hat sich bei dem benutzten Draht als recht gut konstant erwiesen.

Tabelle II.
Vergleich zwischen Tab. I und den Beobachtungen.

T	w_1 beob.	w_1 (Tab.)	Differenz
20,27	0,01421	—	—
56,44	0,11016	0,11009	— 0,00007
60,91	0,12814	0,12823	+ 9
68,41	0,15974	0,15960	— 10
77,98	0,20043	0,20084	— 9
90,30	0,25283	0,25295	+ 12
113,98	0,35370	0,35365	— 5
132,88	0,43313	0,43313	± 0
164,00	0,56204	0,56196	— 8
169,26	0,58346	0,58351	+ 5
185,55	0,64984	0,64992	+ 8
214,53	0,76693	0,76696	+ 3
242,56	0,87890	0,87903	+ 13
273,09	1,00000	1,00000	± 0

Zum Vergleich müssen natürlich die Temperaturen von Kamerlingh Onnes reproduziert werden. Leider ist nur in einem Punkte von ihm eine derartige Angabe zu finden, nämlich der Siedepunkt des Sauerstoffs bei $90,10^\circ$. Es wurden deshalb die Beobachtungen von Holborn¹⁾ über Kohlensäure-Alkoholbäder und diejenigen von Travers²⁾ (Heliumskala) über den Siedepunkt des Wasserstoffs hinzugezogen. Holborn findet die Temperatur eines Kohlensäure-Alkoholbades zu $194,75^\circ$, die von reinem Kohlensäure-Schnee um $0,10^\circ$ tiefer. Es wurde daher der Kohlensäuredampfdruck von 760 mm zu $194,65^\circ$ angenommen. Die Temperatur des Alkoholgemisches wurde im Mittel um $0,10^\circ$ höher gefunden, doch ist das Bad in verschiedenen Tiefen nicht ganz gleichmäßig temperiert. Travers fand den Wasserstoffsiedepunkt zu $20,41^\circ$. Da dieser Punkt außerhalb des Bereiches meiner Messungen liegt, so kann eine kleine Ungenauigkeit desselben sie nur unwesentlich beeinflussen.

Da das Thermometer gelegentlich zerbrach, wodurch sich der Widerstand etwas änderte, sind drei Zustände zu unterscheiden, für welche die gefundenen α -Werte in Tabelle III an-

1) L. Holborn, Ann. d. Phys. 6. p. 245. 1901.

2) M. W. Travers, Untersuchung von Gasen.

gegeben sind. Im ersten Zustand wurde das Thermometer für Messungen an Kohlensäure in der Nähe des Sublimationspunktes, im zweiten für kleinere Drucke derselben, im dritten für Schwefelkohlenstoff und Sauerstoff benutzt. Die Stickstoffdrucke sind über ein anderes Widerstandsthermometer an die Sauerstoffdrucke angeschlossen. Die Nernstsche α -Beziehung

Tabelle III.

α -Werte in den verschiedenen Zuständen.

T	1. Zust.	2. Zust.	3. Zust.
195	0,01040	0,01027	0,00912
90	0,01061	0,01038	0,00918
20	0,00960	—	0,00932
$W_{273,00}$	125,811	125,855	125,742

scheint für Genauigkeitsansprüche von einem Zehntelgrad für die meisten reinen frei aufgespannten Platindrähte hinreichend erfüllt zu sein. Für größere Ansprüche ist es jedoch wünschenswert, mehrere Eichpunkte zu besitzen, und die α -Werte als Funktion des relativen Widerstandes aufzutragen und auszuzeichnen. J. Clay¹⁾, welcher im Institut von Kamerlingh Onnes die Platinwiderstände gemessen hat, glaubt die Nernstsche Formel nur anwenden zu dürfen, wenn als Vergleich ein idealer Platindraht gewählt wird. Er setzt darum für die beiden verglichenen Drähte je einen Reduktionsfaktor in Rechnung und erhält so die Formel:

$$w_1 - w_2 = \alpha \left[\frac{1 - w_2}{1 - \beta} \right].$$

Diese Formel läßt sich aber auch schreiben:

$$w_1 - w_2 = \frac{\alpha}{1 - \beta} (1 - w_2) \quad \text{oder} \quad w_2 = \frac{w_1 - \frac{\alpha}{1 - \beta}}{1 - \frac{\alpha}{1 - \beta}}.$$

Diese beiden Konstanten reduzieren sich also auf eine, und die Nernstsche Beziehung ist wiederhergestellt. Die Bemerkung des Hrn. Clay erweist sich also als ganz hinfällig.

1) J. Clay, Galvanischer Widerstand von Metallen und Legierungen. Jahrb. f. Radioaktivität.

Der bereits erwähnte Platindraht von Henning läßt sich durch die Nernstsche Formel mit einem Fehler von 1 bis 2 Hundertstel Graden zwischen 100° und 200° und einer maximalen Abweichung von 4 Hundertstel Graden zwischen 200 und 273° auf Pt₁ reduzieren. Die dort vorgeschlagene Eichungsmethode erfordert eine Messung bei dem Siedepunkt des Wassers, was in vielen Fällen untunlich ist, z. B. bei den von Nernst benutzten Gefäßen zur Bestimmung von spezifischen Wärmen.

Die Messungen wurden so ausgeführt, daß die Temperatur des Bades möglichst konstant reguliert wurde und dann eine Reihe von Beobachtungen in der Nähe eines Punktes gemacht wurden. Die Druckablesung wurde immer zwischen zwei Widerstandsablesungen eingeschlossen. Die ganze Serie wurde dann zu einem Mittel vereinigt. Die Drucke wurden an der Teilung der Manometerröhren abgelesen, solange eine Genauigkeit von 0,1 mm genügte. Kleinere Drucke wurden an einem Kathetometer mit Fernrohrlibelle abgelesen. Die Beobachtungen wurden durch die Dampfdruckformel von Nernst dargestellt. In den Tabellen IV bis VII sind die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung für Drucke und Temperaturen angegeben, wenn man jedesmal die andere Beobachtung als richtig ansieht. Die Drucke sind auf 0° und mittlere Breite reduziert.

Tabelle IV.

Dampfdruck des Schwefelkohlenstoffs.

<i>W</i>	<i>T</i>	<i>P</i> _{gef.}	<i>P</i> _{ber.}	<i>P</i> _(g-b)	<i>T</i> _(g-b)
—	319,34	760,0	760,1	— 0,1	± 0,00
135,988	292,76	294,27	294,37	— 0,10	+ 0,01
130,726	283,25	199,46	199,34	+ 0,12	— 0,02
125,742	273,09	127,00	127,00	± 0,00	± 0,00
120,269	261,98	74,23	74,15	+ 0,08	— 0,02
116,128	251,57	42,69	42,68	+ 0,01	± 0,00
110,091	241,40	23,64	23,65	— 0,01	+ 0,01
104,874	230,50	11,81	11,80	+ 0,01	— 0,01
86,846	194,9	0,68	0,68	± 0,00	± 0,0

$$\log p = -\frac{1578,8}{T} + 1,75 \log T - 0,003874 T + 4,67948.$$

Tabelle V.

Dampfdrucke der Kohlensäure.

	<i>W</i>	<i>T</i>	<i>P</i> gef.	<i>P</i> ber.	<i>P</i> (gef.—ber.)	<i>T</i> (gef.—ber.)
1. Zustand	87,845	195,71	830,1	828,0	+ 2,1	— 0,03
	86,800	194,63	759,7	759,1	+ 0,6	— 0,01
	86,502	194,04	723,0	723,4	— 0,4	+ 0,01
	86,234	193,50	692,1	692,3	— 0,2	± 0,00
	86,008	193,05	667,1	667,0	+ 0,1	± 0,00
	85,598	192,24	622,7	623,7	— 1,0	+ 0,02
	85,089	191,23	573,2	573,2	± 0,0	± 0,00
	84,717	190,49	538,4	538,4	± 0,0	± 0,00
	83,776	188,63	459,4	459,0	+ 0,4	— 0,01
	82,198	185,51	348,9	348,4	+ 0,5	— 0,02
2. Zustand	82,474	186,00	364,1	364,0	+ 0,1	± 0,00
	81,064	183,21	283,1	282,5	+ 0,6	— 0,02
	79,661	180,44	217,1	217,9	— 0,8	+ 0,04
	78,459	178,07	172,9	173,2	— 0,3	+ 0,02
	76,913	175,03	127,77	127,70	+ 0,07	± 0,00
	76,293	173,82	112,68	112,81	— 0,13	+ 0,01
	75,123	171,52	88,44	88,44	± 0,00	± 0,00
	72,547	166,46	50,39	50,87	— 0,48	+ 0,08
	70,534	162,53	32,19	32,23	— 0,04	+ 0,01
	69,028	159,58	22,65	22,52	+ 0,13	— 0,05
	67,579	156,76	15,79	15,78	+ 0,01	± 0,00
	66,840	155,32	13,09	13,09	± 0,00	± 0,00
3. Zustand	64,613	150,98	7,36	7,29	+ 0,07	— 0,07
	61,986	145,89	3,50	3,51	— 0,01	+ 0,01
		134,9	0,600	0,590	+ 0,010	— 0,1
		130,8	0,278	0,281	— 0,003	+ 0,05
		126,8	0,123	0,129	— 0,006	+ 0,3
4. Zustand		122,8	0,050	0,056	— 0,006	+ 0,6
		118,7	0,024	0,023	+ 0,001	— 0,1

$$\log p = -\frac{1378,3}{T} + 1,75 \log T - 0,0051 T + 6,9484.$$

In Tabelle VIII sind die aus meinen Messungen berechneten Werte des Schwefelkohlenstoff-Dampfdrucks mit denen von Regnault¹⁾ verglichen. Der Siedepunkt des sorgfältig

1) V. Regnault, Rel. des exp. 2. p. 394.

Tabelle VI.

Dampfdrucke des Sauerstoffs.

W	T	$P_{\text{gef.}}$	$P_{\text{ber.}}$	$P_{(g-b)}$	$T_{(g-b)}$
32,597	90,18	766,8	766,5	+ 0,3	± 0,00
30,083	85,45	457,6	456,7	+ 0,9	- 0,02
27,341	80,31	239,5	239,8	- 0,3	+ 0,01
25,068	76,02	129,5	129,8	- 0,3	+ 0,01
23,262	72,63	75,7	75,4	+ 0,3	- 0,01
20,400	67,20	28,07	27,83	+ 0,24	- 0,04
18,244	63,08	11,52	11,53	- 0,01	± 0,00
16,648	59,98	5,49	5,46	+ 0,03	- 0,02
16,253	59,21	4,40	4,48	- 0,08	+ 0,07
15,327	57,37	2,68	2,72	- 0,04	+ 0,06

$$\log p = -\frac{399}{T} + 1,75 \log T - 0,01292 T + 5,0527.$$

Tabelle VII.

Dampfdrucke des Stickstoffs.

T	$P_{\text{gef.}}$	$P_{\text{ber.}}$	$P_{(g-b)}$	$T_{(g-b)}$
80,39	1086,0	1086,0	± 0,0	± 0,00
79,72	1009,4	1009,3	+ 0,1	± 0,00
75,74	631,3	633,1	- 1,8	+ 0,02
72,74	428,6	428,6	± 0,0	± 0,00
70,86	329,4	329,4	± 0,0	± 0,00
67,78	206,9	206,5	+ 0,4	- 0,01
66,83	177,8	177,1	+ 0,5	- 0,02
63,17	93,5	93,5	± 0,0	± 0,00
63,17	93,5	93,5	± 0,0	± 0,00
62,79	86,1	86,3	- 0,2	+ 0,01
61,95	71,9	71,9	± 0,0	± 0,00
60,77	55,3	55,2	+ 0,1	± 0,00
59,95	45,8	45,7	+ 0,1	- 0,01
58,71	34,1	33,9	+ 0,2	- 0,02
57,70	26,4	26,4	± 0,0	± 0,00
56,97	21,8	21,9	- 0,1	+ 0,01

$$\log p_{\text{flüssig}} = -\frac{323,5}{T} + 1,75 \log T - 0,01250 T + 4,7306$$

$$\log p_{\text{fest}} = -\frac{345,6}{T} + 1,75 \log T - 0,00696 T - 4,7506.$$

gereinigten Schwefelkohlenstoffs ist nach v. Unruh¹⁾ 46,25° C. Dieselbe Zahl gibt Timmermans.²⁾ Auch aus den sonst abweichenden Messungen Regnaults läßt sich der gleiche Siedepunkt interpolieren. Diese Zahl wurde daher für die Berechnung der Dampfdruckformel benutzt.

Tabelle VIII.

CS₂-Dampfdrucke verglichen mit Regnault.

<i>t</i>	<i>p_R</i>	<i>p_S</i>	<i>t</i>	<i>p_R</i>	<i>p_S</i>
+ 50	857,1	856,4	+ 10	198,46	198,1
+ 40	617,5	618,7	0	127,90	127,00
+ 30	434,6	435,6	- 10	79,44	78,42
+ 20	298,03	298,3	- 20	47,30	46,51

Die Beobachtungen von J. und A. Zeleny³⁾ über die Dampfdrucke der Kohlensäure ergeben mit sinkender Temperatur zunehmend größere Drucke, als hier gefunden (Tab. IX). Bei 20 mm hat die Differenz die Größe von 2,3° erreicht. Die Abweichungen sind vielleicht dadurch zu erklären, daß den Herren Zeleny noch nicht die Möglichkeit zu Gebote stand, die Temperaturen so genau wie heute zu messen. Die von Nernst⁴⁾ mit einem Membranmanometer und Platinthermometer gemessenen ganz kleinen Drucke (Tab. V) stimmen mit der oben angegebenen Formel befriedigend, mit den Zelenyschen Zahlen aber gar nicht. Mit dem Kohlensäurethermometer wurde der Schmelzpunkt des CS₂ zu 160,93° gefunden.

Tabelle IX.

CO₂-Drucke verglichen mit J. und A. Zeleny.

<i>p</i> (mm)	<i>t_{Zel.}</i>	<i>t_{v. S.}</i>
20	- 116,7	- 114,44
50	- 107,8	- 106,78
170	- 97,9	- 97,16
300	- 89,7	- 89,23
700	- 79,40	- 79,46
760	- 78,84	- 78,44

1) M. v. Unruh, Zeitschr. f. anorg. Chem. **32**, p. 407. 1902.

2) J. Timmermans, Bull. Soc. Chim. Belg. **24**, p. 244. 1910.

3) J. u. A. Zeleny, Phys. Zeitschr. **7**, p. 716. 1908.

4) E. Falck, Phys. Zeitschr. **9**, p. 433. 1908. Die Temperaturen sind wegen Eichung mit einem früheren Wert für den Sauerstoff-Siedepunkt

Die Sauerstoffdrucke wurden gemessen von Travers, Senter und Jaquerod¹⁾, von Kamerlingh Onnes²⁾ und von Bestelmeyer.³⁾ Die Temperaturen der ersteren sind mit dem Heliumthermometer gemessen. Der Anstieg des Druckes ist steiler als hier gefunden.

Tabelle X.

Dampfdrucke des Sauerstoffs verglichen mit Travers.

$P_{\text{(mm)}}$	$T_{\text{Tr.}}$	$T_{\text{S.}}$	Diff.
760	90,20	90,10	0,10°
500	85,39	86,24	0,15
300	82,19	82,01	0,18
150	77,17	76,98	0,18

Der von Kamerlingh Onnes gefundene Anstieg des Druckes ist auch ein wenig steiler.

Tabelle XI.

Dampfdrucke des Sauerstoffs verglichen mit Onnes.

T	$P_{\text{K. O.}}$	$P_{\text{S.}}$	Diff.
90,68	807,0	806,7	0,00°
90,10	760,0	760,3	0,00
86,55	516,2	518,2	0,03
83,65	366,24	368,1	0,04

Bestelmeyer hat nach der dynamischen Methode gearbeitet unter Vermeidung von Siedeverzügen. Der Siedepunkt wurde nach einer früheren Messung von Holborn eingesetzt. Die Temperatur wurde mit einem Platinthermometer nach einer quadratischen Interpolationsformel bestimmt, die aber in dem Gebiet zwischen 90 und 80° den richtigen Verlauf hat. Die Übereinstimmung beruht also nicht auf Zufall (Tab. XII).

korrigiert worden. Die in genannter Arbeit berechnete Dampfdruckkurve kommt der Wirklichkeit besonders zwischen -100° und -130° erheblich näher als die Zelenyschen Daten.

1) M. W. Travers, G. Senter u. A. Jaquerod, Proc. Roy. Soc. 70. p. 484. 1902; Zeitschr. f. phys. Chem. 45. p. 416. 1903.

2) J. Kamerlingh Onnes u. Braak, Leiden Comm. 107. 1908.

3) A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. 14. p. 87. 1904.

Tabelle XII.

Dampfdrucke des Sauerstoffs verglichen mit Bestelmeyer.

p	$T_B.$	$T_S.$	Diff.
374,7	84,08	83,81	0,27°
435,8	85,32	85,05	0,27
596,3	88,08	87,81	0,27
393,6	90,74	90,52	0,22

Druckmessungen über Stickstoff liegen von Fischer und Alt¹⁾ vor. Die Temperaturen sind nach der Wasserstoffskala bei konstantem Drucke angegeben. Die Verfasser halten eine Verunreinigung mit O₂ bis zu 0,3 Proz. für möglich. Die Einzelablesungen weichen oft erheblich von den ausgeglichenen Werten ab. Der Schmelzdruck wurde erst zu 86,4 mm, später zu 94,0 mm gefunden. v. Estreicher fand 93,5 mm in genauer Übereinstimmung mit dem hier gefundenen Wert.

Tabelle XIII.

Dampfdrucke des Stickstoffs verglichen mit Fischer und Alt.

p	$T_{F. u. A.}$	$T_S.$	Diff.
760	77,36	77,24	0,12
700	76,69	76,55	0,14
450	73,28	73,10	0,18
300	70,45	70,22	0,23
180	67,17	66,93	0,24
120	64,79	64,55	0,24

Die hier angegebene Temperaturskala ist charakterisiert durch folgende Fixpunkte:

Tabelle XIV.

Fixpunkte	
Schmelzpunkt des Eises	273,09
Schmelzpunkt des Quecksilbers	234,32
Sublimationspunkt der Kohlensäure	194,65
Schmelzpunkt des Schwefelkohlenstoffs	160,93
Siedepunkt des Sauerstoffs	90,10
Siedepunkt des Stickstoffs	77,25
Schmelzpunkt des Stickstoffs	63,17
Siedepunkt des Wasserstoffs	20,41

1) K. T. Fischer u. H. Alt, Ann. d. Phys. 9. p. 1149. 1902.

Nach dem zweiten Hauptsatz hängt die molekulare Verdampfungswärme (inkl. äußerer Arbeit) mit dem Dampfdruck zusammen durch die Gleichung:

$$\lambda = (v - v') T \cdot \frac{dp}{dT}.$$

Wird v' vernachlässigt und werden auf den Dampf die Gasgesetze angewendet, so wird:

$$\lambda = R T^2 \frac{d \ln p}{dT} = 4,571 T^2 \frac{d \log p}{dT}.$$

Nernst fand die empirische Beziehung für nicht zu große Dampfdrucke:

$$p(v - v') = R T \left(1 - \frac{p}{\pi_0}\right).$$

Wir erhalten dann die Formel:

$$\lambda = R T^2 \frac{d \ln p}{dT} \left(1 - \frac{p}{\pi_0}\right) = 4,571 T^2 \frac{d \log p}{dT} \left(1 - \frac{p}{\pi_0}\right).$$

Man kann auch nach der genauen Formel rechnen und das Dampfvolumen nach der Gleichung von D. Berthelot berechnen. Die nach beiden Methoden berechneten Verdampfungswärmen sind in folgender Tabelle mit den beobachteten Werten zusammengestellt.

Tabelle XV.
Verdampfungswärmen.

Substanz	$\lambda_{\text{berechnet}}$		$\lambda_{\text{gefunden}}$	Beobachter	T
	Nernst	Berthelot			
CS ₂	6743	6667	6614	Koref ¹⁾	287,2
CO ₂	6011	5929	6266	Behn ²⁾	194,7
CO ₂			6257	Favre u. Silbermann ³⁾	194,7
O ₂	1624	1583	1629		
O ₂	1784	1776	1777	Alt ⁴⁾	90,1
N ₂	1386	1327	1335	"	66,2
N ₂	1459	1446	1450	"	77,2
				"	68,2

1) F. Koref, Ann. d. Phys. **36**. p. 49. 1911.

2) U. Behn, Ann. d. Phys. **1**. p. 270. 1900.

3) Favre u. Silbermann, Ann. chim. phys. **37**. p. 470.

4) H. Alt, Ann. d. Phys. **19**. p. 770. 1906.

Die Zahlen von Alt sind seinen Formeln entnommen und immer den zugehörigen Drucken (nicht Temperaturen) zugeordnet. Die Schmelzwärme des Stickstoffs berechnet sich zu 199 cal.

Auf Grund der gefundenen Sauerstoffdrucke folgt eine Korrektionsstabelle für das Stocksche Sauerstoffthermometer. Der Eispunkt ist gleich $273,09^{\circ}$ abs. gesetzt.

Tabelle XVI.

Korrektionsstabelle für das Stockthermometer.

$t_{\text{abgelesen}}$	$t_{\text{koriigiert}}$	$t_{\text{abgelesen}}$	$t_{\text{koriigiert}}$
- 183	- 183,99	- 192	- 192,53
184	184,94	193	193,51
185	185,88	194	194,54
186	186,85	195	195,53
187	187,82	196	196,50
188	188,75	197	197,45
189	189,70	198	198,46
190	190,62	199	199,48
191	191,58	200	200,51

Zum Schluß soll noch auf eine jüngst erschienene Dissertation, von E. Kaspar¹⁾ hingewiesen werden, welcher gleichfalls versucht hat, den Dampfdruck fester Kohlensäure zu Temperaturmessungen in Kohlensäurebädern zu verwerten. Er bestätigt die Differenz von $0,10^{\circ}$ zwischen reinem Schnee und der Alkoholmischung und weist ebenfalls auf den Einfluß des hydrostatischen Druckes auf die räumliche Temperaturverteilung hin. Auch sind Störungen durch absorbierte Luft beobachtet worden. Leider fußt diese Arbeit auf den Zelenyschen Drucken. Die Größe dT/dp in der Nähe des Siedepunktes wird mit Zeleny zu $0,17$ Grad/Zentimeter angegeben. Aus meiner Formel würde sich $0,163$ ergeben. Nach dem oben über Temperaturbäder Gesagten ist der Dampfdruck zu Temperaturmessungen in Kohlensäure-Alkoholbädern nur mit Vorsicht zu benutzen, da dieselben an der Oberfläche am kältesten sind. Die Kohlensäure im Meßrohr sublimiert dadurch bis an die Badoberfläche hinauf und kann wegen ihres festen Aggregat-

1) E. Kaspar, Diss. Marburg 1913.

zustandes nicht wieder herunterfließen. Da immer der Dampfdruck des kältesten Punktes gemessen wird, so erhält man annähernd die Temperatur der Badoberfläche und nicht der Tiefe, in der sich das untere Ende des Rohres befindet.

Zusammenfassung.

1. Es wurden die Messungen von Kamerlingh Onnes und Clay über die Widerstände des Pt_1 zu einer Kurve ausgezogen, die sich oberhalb 100° abs. durch eine kubische Gleichung ausdrücken läßt. Diese Kurve nebst ihrem Differentialquotienten wurde in einer Tabelle mitgeteilt.

2. Durch Eichung an vier Punkten wurde mittels der Nernstschen Reduktionsbeziehung zwischen verschiedenen Platinsorten ein Platin-Widerstandsthermometer an diese Tabelle angeschlossen.

3. Mittels des so geeichten Widerstandsdrahtes wurden die Dampfdruck-Temperaturkurven von Schwefelkohlenstoff, Kohlensäure, Sauerstoff und Stickstoff nach der statischen Methode gemessen.

4. Es wurde ein Dampfdruckthermometer beschrieben.

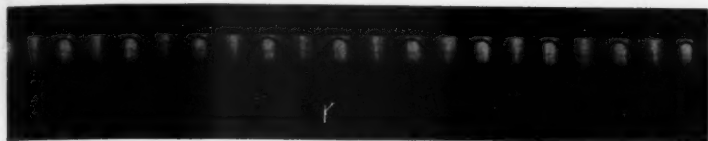
5. Es wurden verschiedene Temperaturbäder und ihre Eignung zu statischen Dampfdruckmessungen besprochen.

6. Die gemessenen Dampfdrucke und die daraus berechneten Verdampfungswärmen wurden mit den Resultaten anderer Beobachter verglichen.

Wegen weiterer Einzelheiten wird auf die demnächst erscheinende Dissertation verwiesen.

Ich möchte nicht versäumen, an dieser Stelle Hrn. Prof. Nernst meinen wärmsten Dank auszusprechen für das rege Interesse und die vielfache Förderung, welche er der vorliegenden Arbeit hat angedeihen lassen.

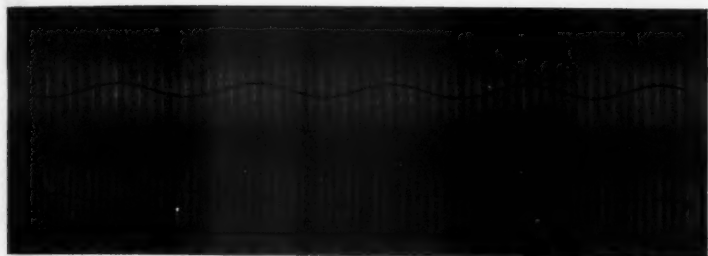
(Eingegangen 25. Juli 1913.)



1

Pl. 22

←



2

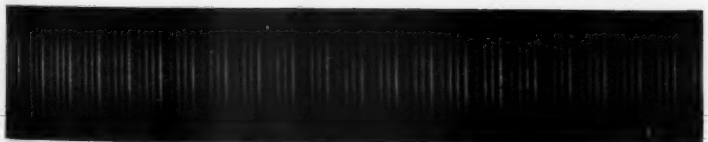
Pl. 42

→



3

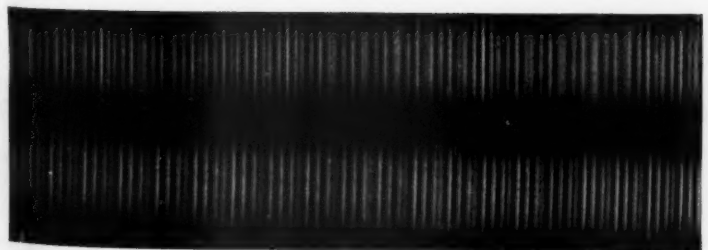
Pl. 57a



4

Pl. 38; Vokal ä

←



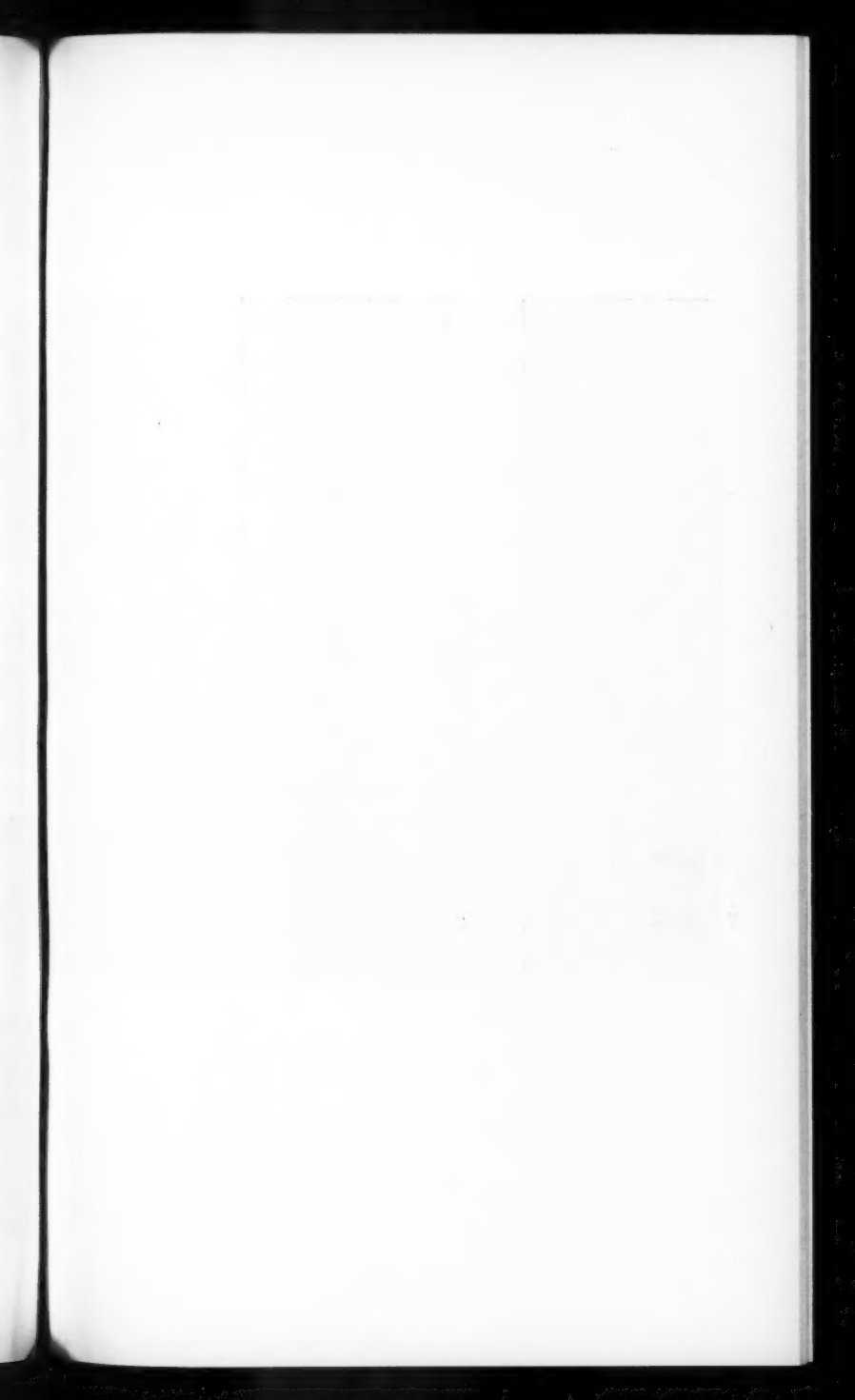
5

Pl. 39; Vokal a

→

M. Siegbahn.







Pl. 42; Vokal *u*

6



Pl. 52; Vokal *ä*

7

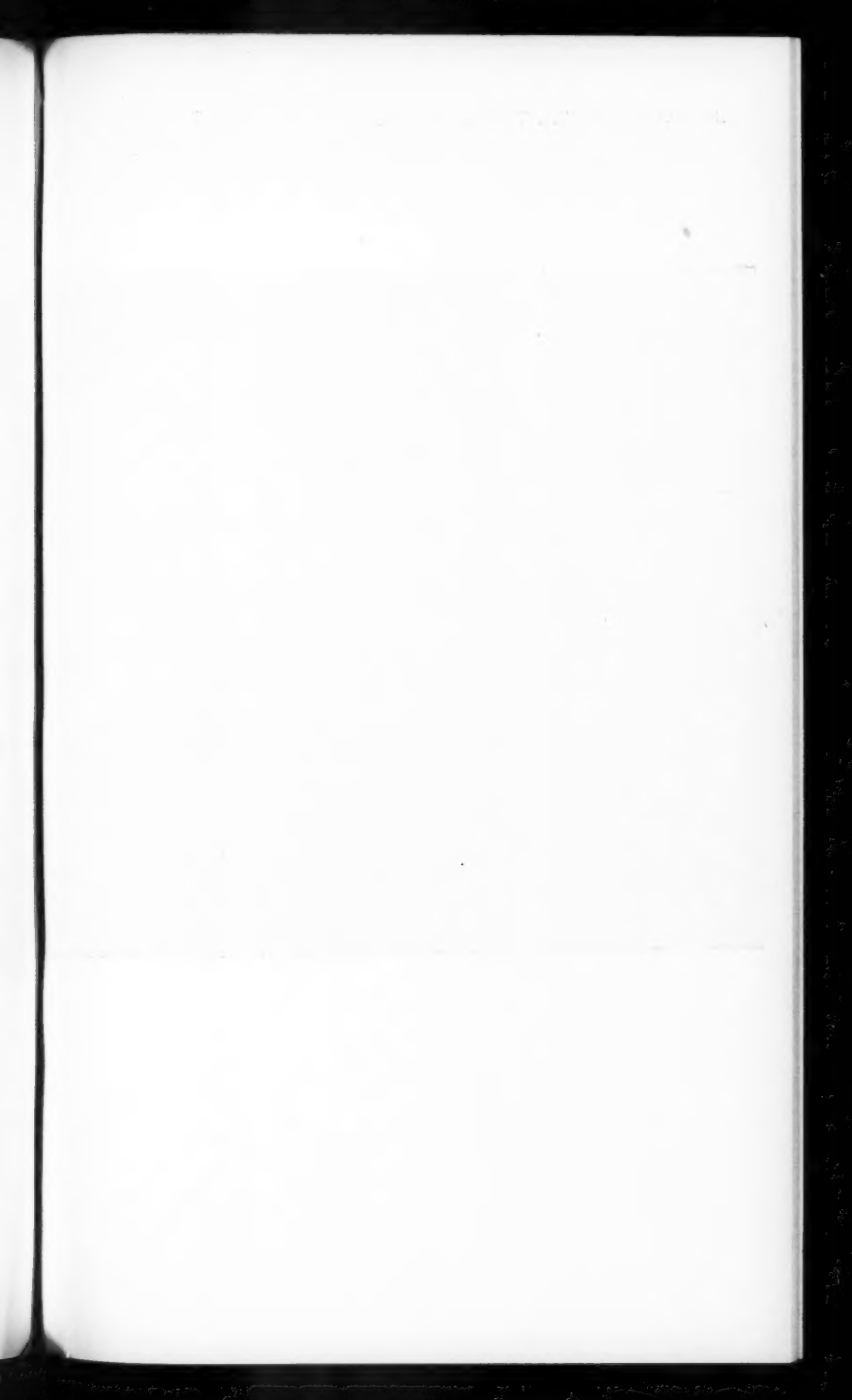


Pl. 54; Vokal *i*

9

Pl. 53; Vokal *u*

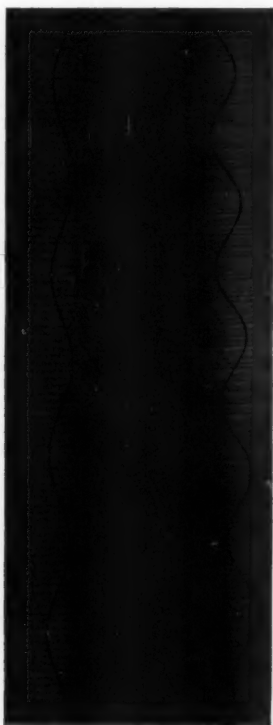
10





Pl. 44; Vokal *u* (schwed.)

11



Pl. 46; Vokal *e*

12



bahn.



Pl. 47; Vokal *y*

14



Pl. 45; Vokal *i*

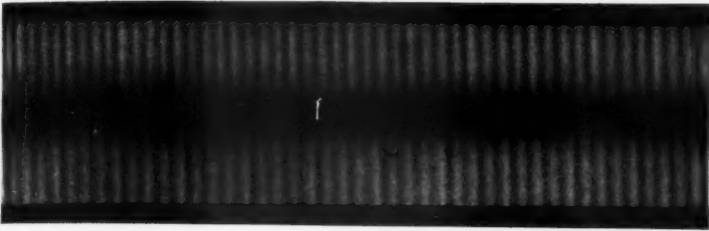
15



←

16

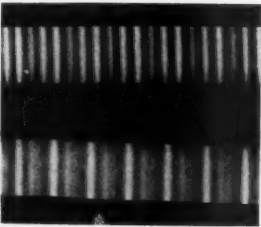
Pl. 49



→

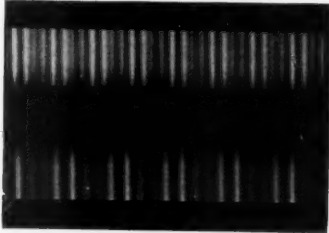
17

Pl. 55; Vokal e



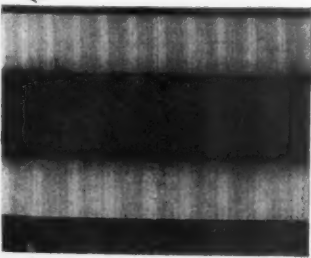
←

18



←

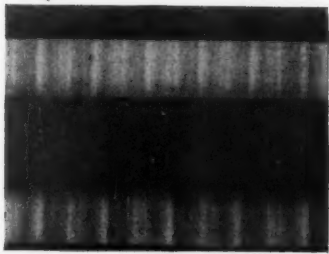
19



→

←

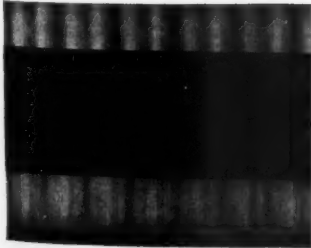
20



→

←

21



→

←

22

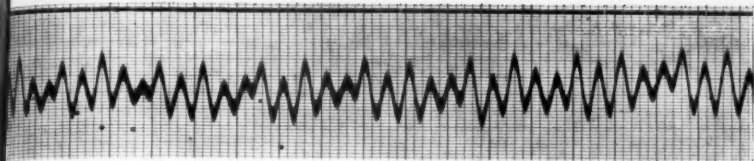


→

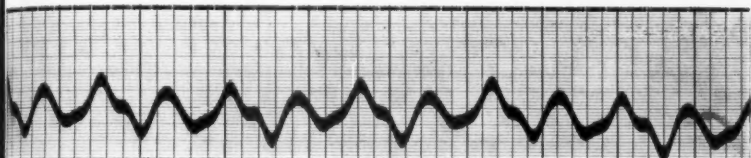
←

23

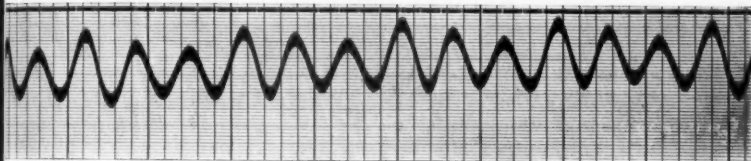




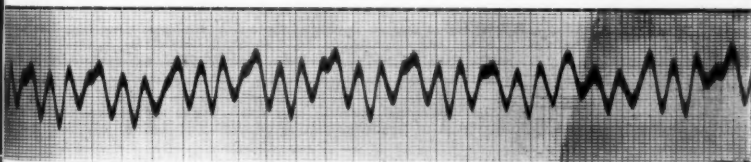
10 Pl. 43



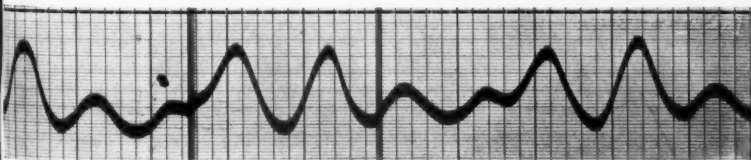
13 Pl. 42



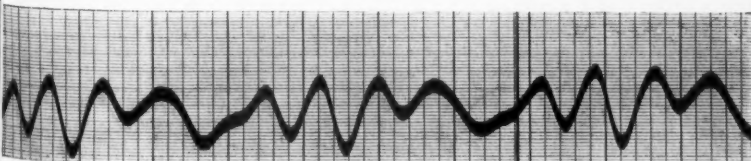
14 Pl. 42



6 Pl. 39



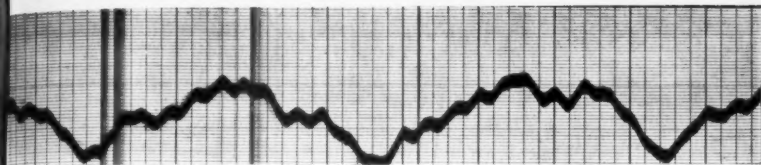
23 Pl. A. 72



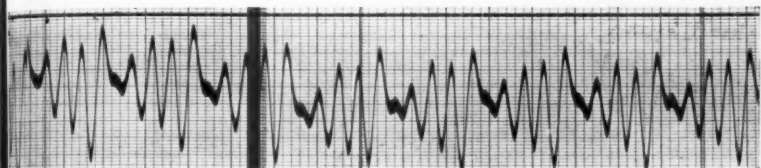
24 Pl. A. 80

M. Siegbahn.

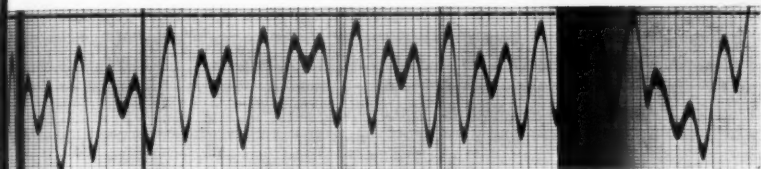




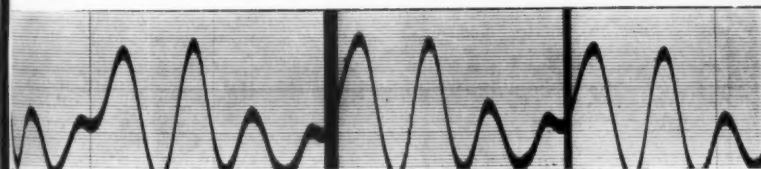
27 Pl. A. 85



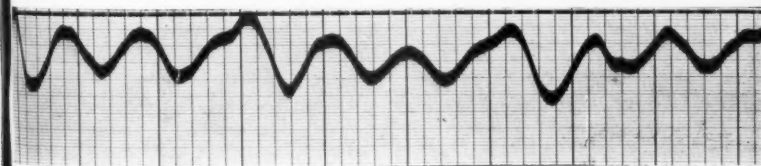
1 Pl. 38



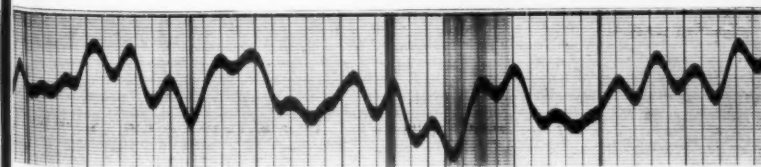
2 Pl. 53



22 Pl. A. 72

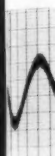
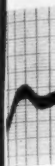


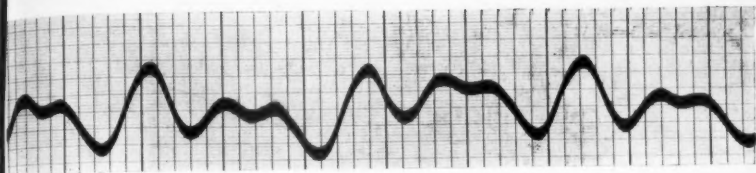
15 Pl. 52



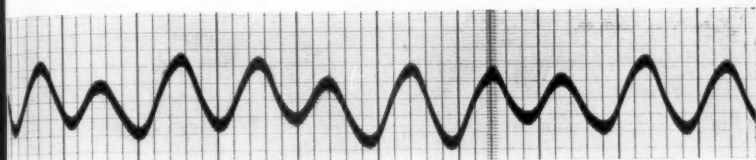
18 Pl. 45

M. Siegbahn.

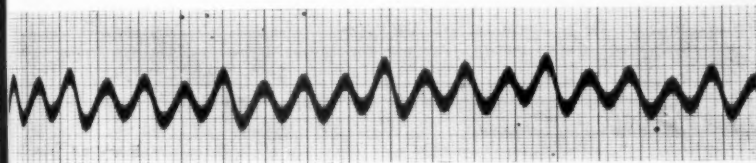




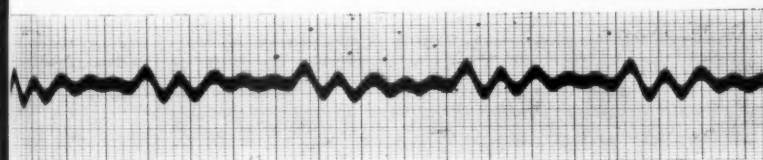
21 Pl. A. 71



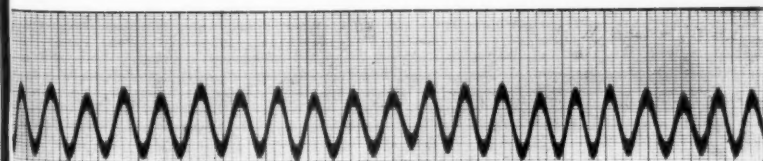
20 Pl. A. 71



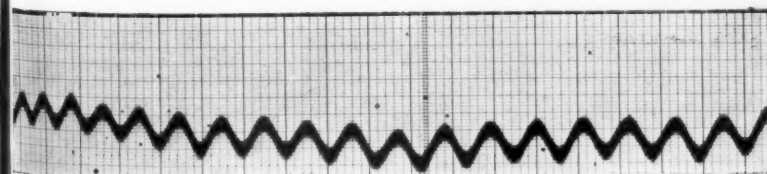
9 Pl. 55



12 Pl. 46



11 Pl. 40



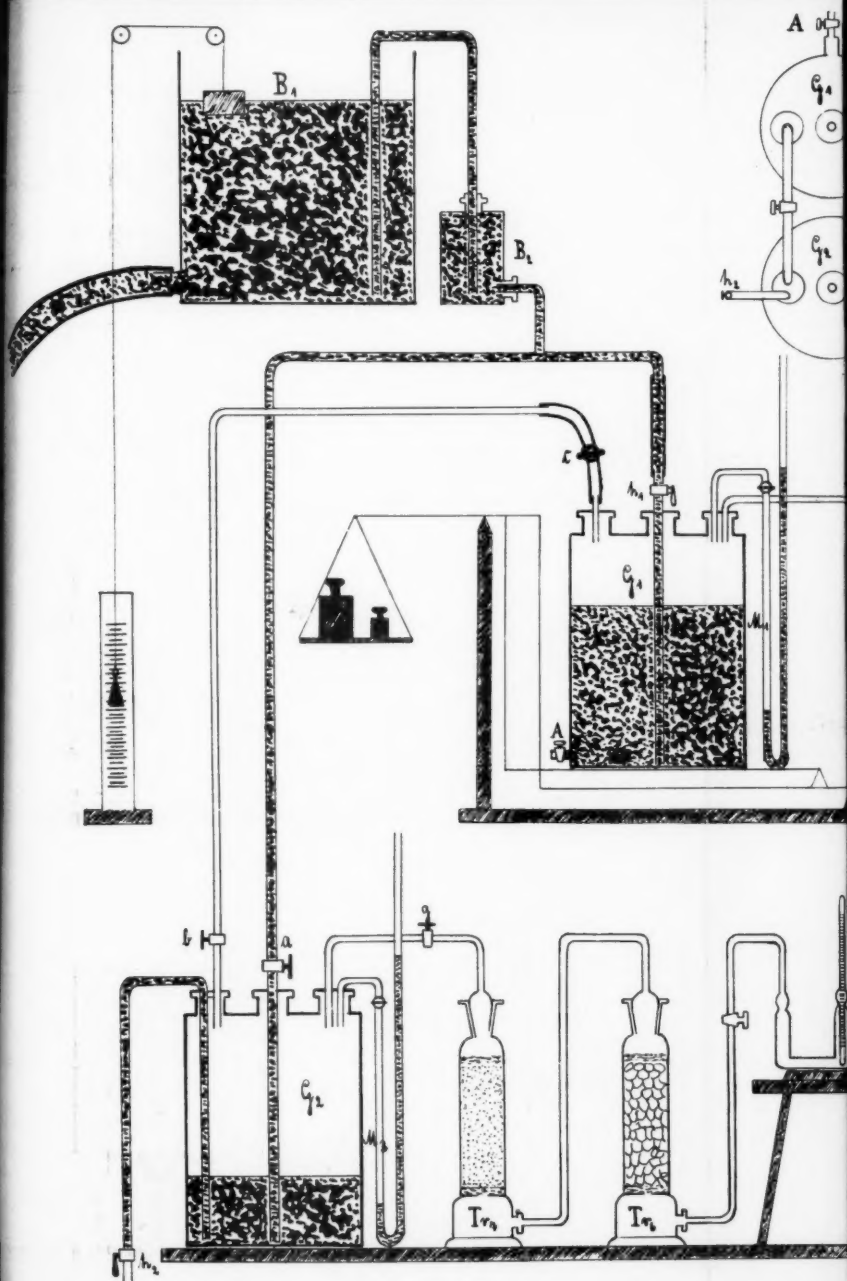
7 Pl. 50a

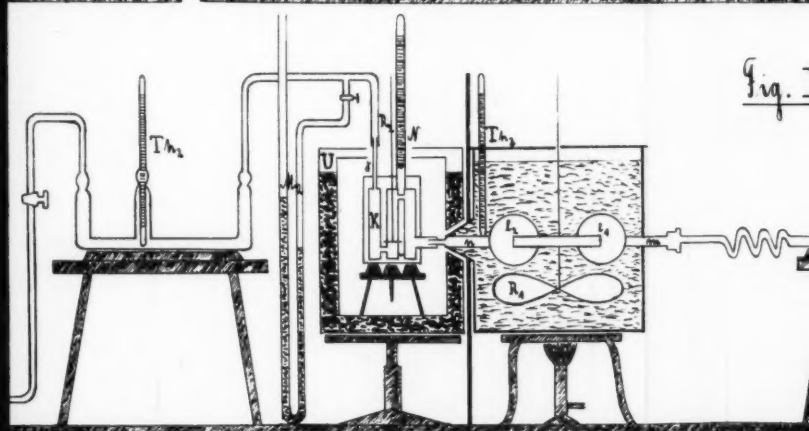
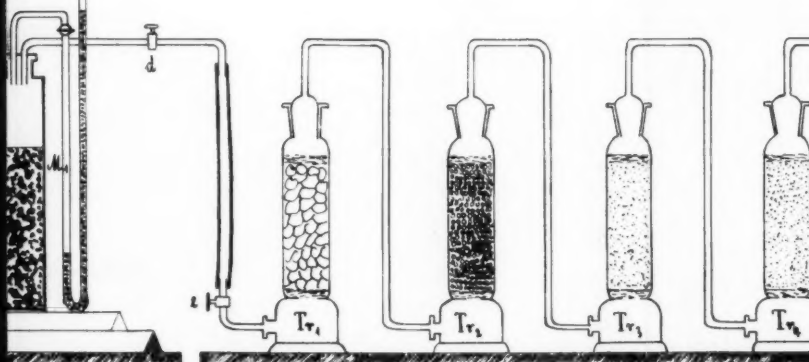
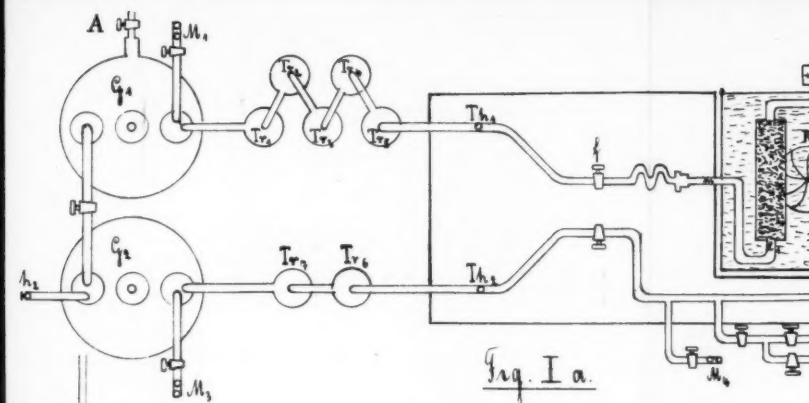
M. Siegbahn.











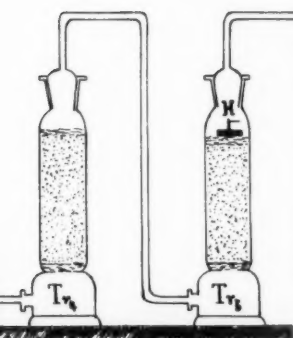
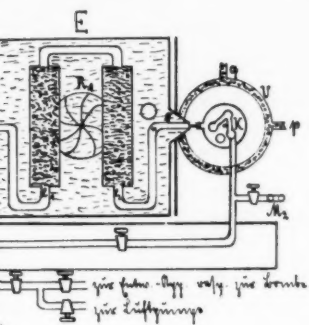
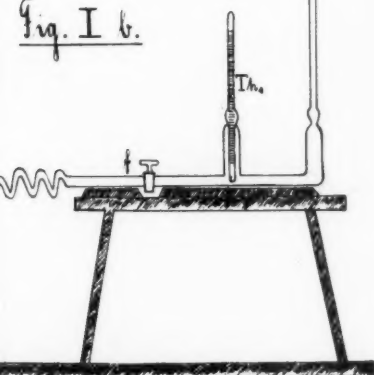
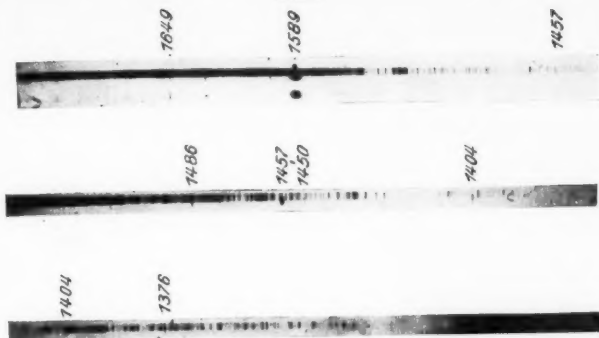


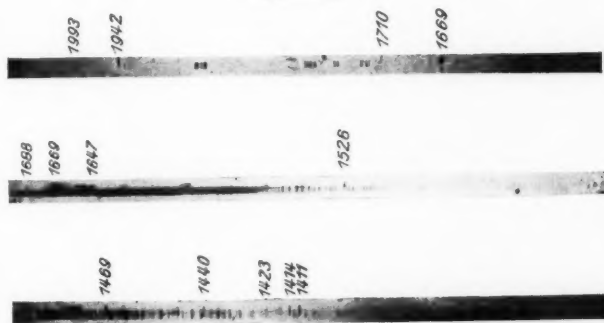
Fig. I b.



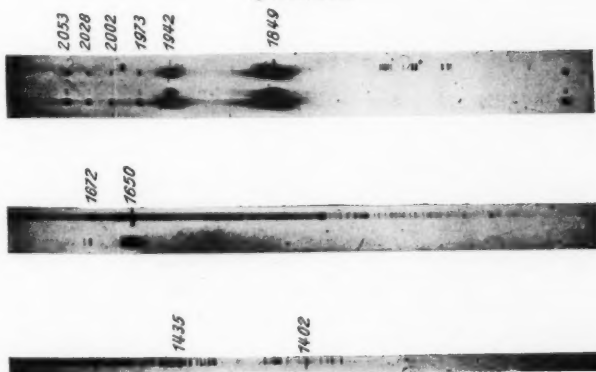
Zink.



Cadmium.



Quecksilber.



K. Wolff.



